الجُمْهوريَّةَ العَربيَّة السُّوريَّة
وزارة التّربيَة
المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الرّياضيّات

الجبـــر

كتاب الطالب

الصَّفُّ التَّاسع

2022 - 2021م
1442 هـ

طُبِع أوَّل مرَّة للعام الدراسي 2017 – 2018 م

تأليف

فئة من المختصّين

مُقدّمة

يقع هذا الكتاب ضمن سلسلة تطوير منهاج الرياضيات في الجمهوريّة العربيّة السوريّة وهو يتناول مادة الرياضيات للسنة الأخيرة من التعليم الأساسي (الصف التاسع). يسعى الكتاب من حيث مضمونه إلى صيانة مكتسبات المتعلم وتنمية مهارته، وتزويده بأدوات رياضياتية، بهدف السمو بها تدريجياً إلى مستوى البرهنة الرياضياتية، كما يسعى إلى توظيف هذه المكتسبات والمهارات والنتائج في حلّ المسائل الرياضياتية، وزوِّد الكتاب بعدد من التطبيقات الحياتية لتنمية مهارة المتعلّم في حلّ المشكلات التي هي هدف أساسي من أهداف الكتاب.

لقد أصبح المتعلّم الفاعل الأساسي في بناء معارفه، إذ تضعه الأنشطة في مواقف مختلفة بعضها يهدف إلى توظيف المكتسبات السابقة، وبعضها يهدف إلى دفعه إلى البحث عن المعرفة، ووبعضها يحثّهُ على بحث عن الحلول وصياغتها بلغة سليمة، وبعضها الآخر يدفعه نحو تطبيق مكتسباته المعرفية وتمكينه من صياغة الإثبات وتنمي لديه مهارات التفكير الاستقصائي والتفكير الناقد والإبداعي.

زوّد الكتاب برسوم توضيحية وصور ومقدّمات ومعلومات تاريخية تفسح المجال لتعرُّف النتاجات العلمية الإنسانية وتاريخ تطور الرياضيات وإسهام هذا العلم في تطور الحضارة الإنسانية.

لقد جرى تنويع الأنشطة والتدريبات والتمارين والمسائل، في نهاية كلّ درس فقرة **تدرّب** لا تحتاج سوى التطبيق المباشر للمعارف ويمكن إنجازها بسهولة، أمّا تمرينات ومسائل نهاية الوحدة فهي متدرّجة من البسيط إلى المركّب وتتطلّب جهداً إضافياً لحلّها.

تضمَّنَ الكتاب على ست وحداتٍ يضم كلٌّ منها عدداً من الدروس. ونجدُ في كلّ وحدةٍ عدداً من الفقراتِ المميَّزةِ التي نُجْمِلُها فيما يأتي:

- انطلاقة نشطة تهدفُ إلى تعزيزِ المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلّم في هذه الوحدة والإضاءة على مفاهيمها، والتمهيد لها.
- نشاط يهدفُ إلى طرح أسئلة تُظهر مدى معرفة الطالب بمحتوى الدرس أو يقدم طرائق لإثبات بعض الخواص في هذا الدرس فهو بمثابة اختبار قبلي للطالب لمحتوى الدرس.
- تعلّم زودت بأمثلة هي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكوّن نماذجَ يجبُ اتباعها عند حلِّ التدريبات والمسائل.
- اكتساب معارف تعزز ما تعلّمه الطالب وتتضمّن طرائق وإرشاداتٍ على كيفية استعمال القضايا والمفاهيمَ الأساسيّة في أمثلة توضيحيّة.

- ❖ تحقّق من فهمك تدريبات وتمارين ومسائل تعتبر اختباراً بعدياً لما تعلّمه الطالب في الدرس ويكون دور المدرّس موجهاً وميسراً بالإشراف على حلّها أثناء الحصّة الدرسية.
- ❖ تدرب تمارين ومسائل تعزز ما تعلّمه الطالب في الدّرس ويجري فيها حلّ تمارين بعضها تطبيق مباشر لمفاهيم الدرس وبعضها الآخر للتحقّق من فهم محتوى الدرس.
- ❖ تمرينات ومسائل لتمكين المدرّس من مراعاة الفروق الفردية لطلابه وتمكّن الطالب من ربط المفاهيم التي تعلّمها الطالب في الوحدة وأيضا ربط هذه المفاهيم مع ما تعلّمه الطالب سابقاً.
- ❖ لإحراز تقدم تأتي هذه التمارين والمسائل لتنمي قدرات الطلاب وتكوّن بمثابة تعلم من خلال التمارين والأنشطة وكذلك ليتعلّم الطالب تحرير النصوص وحلولها فصياغة الحلّ صياغة سليمة لا تقلّ أهمية عن معرفة هذه الحلول.

نأمل أن يكون هذا الكتاب مرشداً وعوناً لكلّ متعلّم للرياضيات، آملين من زملائنا، تزويدنا بمقترحاتهم المتعلقة بهذا الكتاب وبالصعوبات التي تواجههم ومدى استجابة طلابهم لمواضيعه.

المُعدّون

المحتوى

خطّة توزيع المنهاج

يخصص ثلاث حصص أسبوعياً لكتاب الجبر وحصتان أسبوعياً لكتاب الهندسة.

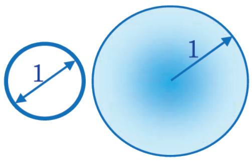
الشهر		الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول	الجبر		① طبيعة الأعداد	① طبيعة الأعداد	② القواسم المشتركة لعددين صحيحين ③ كسور مختزلة
	الهندسة		① بعض خواص التناسب	② النسب المثلثاتية لزاوية حادة	② النسب المثلثاتية لزاوية حادة
تشرين أول	الجبر	④ الجذر التربيعي لعدد موجب	تمرينات ومسائل	① قوة عدد عادي	② النشر والتحليل ③ مطابقات شهيرة
	الهندسة	③ علاقتان مهمتان بين النسب المثلثاتية	④ نسب زوايا شهيرة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
تشرين ثاني	الجبر	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل ① معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد	② معادلات – خاصة الجداء الصفري	③ متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد– تمرينات ومسائل
	الهندسة	① مبرهنة النسب الثلاث	② مبرهنة النسب الثلاث العكسية	③ التشابه	تمرينات ومسائل
كانون أول	الجبر	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	① جملة معادلتين خطيتين بمجهولين	② معادلة المستقيم
	الهندسة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	① زوايا محيطية وزوايا مركزية	① زوايا محيطية وزوايا مركزية
كانون ثاني	الجبر	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			③ حل جملة معادلتين بيانياً
	الهندسة	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			تمرينات ومسائل
شباط	الجبر	تمرينات ومسائل	① مفهوم التابع	② طرائق تعريف التابع	تمرينات ومسائل
	الهندسة	② الرباعي الدائري	③ المضلّعات المنتظمة	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
آذار	الجبر	تمرينات ومسائل	① مفهوم الاحتمال	② أحداث متنافية. أحداث متعاكسة	③ تجارب عشوائية مركّبة
	الهندسة	تمرينات ومسائل	① تذكرة بالمجسمات	② الكرة	③ مقاطع مجسمات
نيسان	الجبر	④ الربيعات	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
	الهندسة	③ مقاطع مجسمات	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل	تمرينات ومسائل
أيار	الجبر	تمرينات ومسائل			
	الهندسة	تمرينات ومسائل			

1

الوحدة الأولى
الأعداد والكسور

1. طبيعة الأعداد
2. القواسم المشتركة لعددين صحيحين
3. كسور مختزلة
4. الجذر التربيعي لعدد موجب

العدد π هو واحد من أهم الثوابت في الرياضيات، ويمثل محيط دائرة قطرها يساوي الواحد أو مساحة دائرة نصف قطرها يساوي الواحد.



اهتمتْ الحضارات القديمة بحساب قيمة هذا العدد، إذْ يعطى محيط أي دائرة قطرها يساوي d بالصيغة πd، وتعطى مساحة أيّ دائرة نصف قطرها يساوي r بالصيغة πr^2.

أظهرت رقم فخاريّة مكتوبة بالمسمارية وتعود إلى الفترة 1900-1600 قبل الميلاد أنّ البابليين كانوا يستعملون قيمة تقريبية للعدد π تساوي $3\frac{1}{8}=3.125$. في حين أظهرت مخطوطة من ورق البردي أنّ قدماء الفراعنة استعملوا قيمة تقريبية أخرى للعدد π تساوي

$$4\left(\frac{8}{9}\right)^2=3.1605\cdots\approx 3\frac{1}{7}.$$

رقم فخارية بابليّة مكتوبة باللغة المسمارية

نعلم من دراسة الرياضيات أنّ العدد π ليس عدداً عادياً فكتابته العشرية ليست منتهية وليست دورية، ولقد صار العلماء يتبارون في حساب خاناته ويستعملون هذه الحسابات في اختبار الحواسيب فائقة السرعة الحديثة. أمّا الرقم القياسي فيحمله بيتر تروب *Peter Treube* الذي حسب ما يزيد عن 22 تريليون خانة عشرية من العدد π في حساب استغرق ثلاثة أشهر ونصف الشهر وذلك في تشرين الثاني من عام 2016.

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279$$
$$502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820\ 974\ 944$$
$$592\ 307\ 816\ 406\ 286\ 208\ 998\ 628\ 034\ 825\ \cdots$$

1

الأعداد والكسور

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها.

.1 **التعبير عن القسمة الإقليدية (التقسيم مع الباقي):** يمكن التعبير عن خارج وباقي القسمة الإقليدية للعدد 37 على العدد 4 على النحو الآتي:

① $37 = 8 \times 4 + 5$ ② $37 = 9 \times 4 + 1$ ③ $37 = 10 \times 4 - 3$

.2 **قابلية القسمة على العدد 2:** العدد الآتي يقبل القسمة على العدد 2:

① 6625 ② 221 ③ 3578

.3 **قابلية القسمة على العدد 3:** يقبل عددٌ صحيح القسمةَ على العدد 3

① إذا كان رقم آحاده 3 أو 6 أو 9.

② إذا كان جداء ضرب أرقامه مضاعفاً للعدد 3.

③ إذا كان مجموع أرقامه مضاعفاً للعدد 3.

.4 **اختصار كسر:** بعد اختصار الكسر $\frac{15}{35}$ نحصل على الكسر:

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{7}$

.5 **الشكل العشري لكسر:** الشكل العشري للكسر $\frac{4}{5}$ هو:

① 4.5 ② 0.8 ③ 0.54

.6 **معرفة الكسر العشري:** العدد الآتي ليس كسراً عشرياً:

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{5}{3}$

① طبيعة الأعداد

نشاط «تعيين طبيعة عدد»

معلومة

- العدد العادي هو كلّ عدد يُكتب بالشكل $\frac{a}{b}$، حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي لا يساوي الصفر.
- العدد العادي قد يكون صحيحاً، مثل 5 ، $-\frac{6}{2}$، ...، وقد يكون غير صحيح، مثل $\frac{5}{3}$، $\frac{7}{2}$،.....
- العدد العشري هو كلّ عدد عادي يكتب بالصيغة $a\times10^n$، حيث a و n عددان صحيحان.
- العدد العادي غير الصحيح قد يكون عشرياً، مثل $4.5=\frac{9}{2}$، أو غير عشري، مثل $1.666\cdots=\frac{5}{3}$.

صحيح أم خطأ

أيُّ المقولات الأربعة الآتية صحيحة وأيّها غير صحيح؟

① العدد π ليس عدداً عادياً.

② أربعة بالضبط من أعداد القائمة الآتية هي أعداد عشرية:

$$3.14,\ \ \pi,\ \ 10^{-2},\ \ \frac{5}{3},\ \ \frac{1}{2},\ \ -4,\ \ 2.7,\ \ 0.5$$

③ جميع أعداد القائمة الآتية هي أعداد عادية:

$$7,\ \ \frac{1}{3},\ \ -\frac{3}{5},\ \ 2.5,\ \ -1.5,\ \ 10^{-3}$$

④ مجموع الأعداد العادية الصحيحة في القائمة الآتية يساوي 1000:

$$2,\ \ \frac{1}{3},\ \ -5.3,\ \ \pi,\ \ \frac{2}{7},\ \ 10^{3},\ \ -2,\ \ 7.5$$

العدد π هو خارج قسمة طول قوس دائرة على طول قطرها.

1

تعلم

الأعداد العادية

العدد العادي هو كلّ عدد يمكن كتابته بالصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير الصفر.

لكلِّ عددٍ عاديٍّ كتابةٌ عشرية **منتهية** أو **دوريّة غير منتهية**، أي إنّ خاناته تتكرّر بدءاً من حدٍّ معيّن.

فالأعداد الصحيحة والعشرية هي أيضاً أعداد عادية.

مثال تأمل الأعداد العادية:

$$\frac{20}{4} = 5$$

$$\frac{27}{4} = 6.75$$

$$-\frac{789}{21} = -37.571428571428571428571428571428\cdots$$

$$\frac{11995}{220} = 54.52272727272727\cdots$$

مثال العددان π و $\sqrt{2}$ عددان غير عاديَّيْن. إنّ الكتابة العشرية لكلّ من هذين العددين غير منتهية وغير دورية. باستعمال الآلة الحاسبة لن نجد سوى قيم تقريبية للأعداد غير العادية:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\cdots\cdots \approx 1.41$$

$$\pi = 3.1415926535897932\cdots\cdots \approx 3.14$$

تحقّق من فهمك

① ضع ناتج كلٍّ من العمليات الآتية بصيغة كسر. وبيّن أيكون الناتج عدداً صحيحاً؟

① $\frac{7}{5}+\frac{4}{5}$ ② $\frac{7}{5}-\frac{4}{5}$ ③ $\frac{-7}{5}-\frac{2}{5}$

④ $\frac{-4}{7}+\frac{15}{7}$ ⑤ $\frac{5}{2}-\frac{15}{2}$ ⑥ $-\frac{3}{4}+\frac{8}{4}$

② انسخ ثم أكمل ما يأتي.

① $\frac{1}{2}=\frac{\cdots}{6}$ ② $\frac{2}{3}=\frac{\cdots}{6}$ ③ $\frac{1}{3}=\frac{\cdots}{6}$

تدرّب

① ضع ناتج كلٍّ من العمليات الآتية بصيغة كسر. وبيّن أيكون بين هذه النواتج أعداد عشرية؟

① $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

② ليكن العددان $A=\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$ و $B=\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$

1. أكمل المساواة الآتية: $\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{12}$

2. اكتب كلّاً من A و B بصيغة كسر.

3. واحد من العددين A و B عددٌ عشري. أيّهما؟

③ ليكن $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

1. سمِّ مضاعفاً مشتركاً للعددين 4 و 6.

2. احسب ناتج A بصيغة كسر. هل A عدد عشري؟

④ لدينا الأعداد الآتية:

① $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}$ ② $4-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{4}{3}+\frac{1}{12}$

1. احسب كلّاً منها بصيغة كسر.

2. واحد فقط من النواتج التي حصلنا عليها عدد عشري، عيّنه؟

⑤ لدينا الأعداد الآتية:

① $\pi+\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{7}{2}-\frac{8}{5}$ ③ $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

1. احسب ناتج كلٍّ منها بصيغة كسر.

2. أيُّ تلك النواتج عدد عشري؟ وأيّها عددٌ غير عادي؟

2 القواسم المشتركة لعددين صحيحين

نشاط « عودة إلى القاسم المشترك الأكبر »

1. العبارة المناسبة

تأمّل هذه العبارات الأربع:

«مضاعف للعدد» «قاسم للعدد» «يقسم» «يقبل القسمة على...».

أكمل كلّاً مما يأتي باستعمال العبارة المناسبة من بين العبارات السابقة، على أن يجري الانتقال من العدد الأول إلى الثاني مرة من اليمين إلى اليسار وأخرى من اليسار إلى اليمين.

① $25 \cdots\cdots 5$ ② $3 \cdots\cdots 21$ ③ $4 \cdots\cdots 32$ ④ $143 \cdots\cdots 11$

2. تحضير مزهريات

لدى بائعة زهور 84 وردة جورية و 48 زنبقة، تريد أن تصنع منها باقات متماثلة نوعاً وعدداً.

1. هل يمكن للبائعة صنع أربع باقات متماثلة؟ ما مكوّنات كلٍّ منها؟
2. اكتب، بترتيب تصاعدي، جميع قواسم العدد 48، وكذلك قواسم العدد 84.
3. ما عدد الباقات المتماثلة التي يمكن للبائعة صنعها؟
4. ما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن للبائعة صنعها؟

مفردات لغوية وترميز: القاسم المشترك الأكبر Greatest Common Divisor.

نسمي قاسماً مشتركاً للعددين 48 و 84 أي عدد طبيعي يقسم كلّاً منهما. وأكبر قواسمهما المشتركة يسمى القاسم المشترك الأكبر، ويُرمز إليه بالرمز $\text{GCD}(48,84)$.

3. القاسم المشترك الأكبر والفرق

1. في كل من الحالتين الآتيتين: ① $a=18$ و $b=12$ ② $a=25$ و $b=22$

- نظِّمْ قائمة تضم قواسم كلٍّ من العددين a و b، ثُمّ قائمة تضم قواسم العدد $a-b$.
- جِدْ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b، ثُمّ للعددين b و $a-b$.

2. إذا كان العددان الطبيعيان a و b موجبين تماماً وكان $a>b$، وكان d قاسماً مشتركاً لهما:

① أكمل العبارة «كان العددان $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ عددين .... »

② استنتج ممّا سبق ومن المساواة $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$ أنَّ d يقسم $a-b$.

③ أكمل العبارة « إذا كان d قاسماً لكلٍّ من a و b، كان .... »

سنقبل، دون إثبات، أنَّ

$\text{GCD}(a,b)=\text{GCD}(b,a-b)$ في حالة عددين طبيعيين $a>b$.

تعلّم

فيما يأتي، a و b و k هي أعداد طبيعية موجبة تماماً.

قواسم عدد صحيح

- القول « k قاسمٌ للعدد a » يعني « $\frac{a}{k}$ عدد صحيح ».
- القول « k قاسمٌ للعدد a » يُعبر عنه أيضاً بالقول « k يقسم a ».

مثال

- العدد 6 قاسمٌ للعدد 18، لأنَّ $3 = \frac{18}{6}$ والعدد 3 عددٌ صحيح.
- العدد 4 ليس قاسماً للعدد 18، لأنَّ $4.5 = \frac{18}{4}$ والعدد 4.5 ليس صحيحاً.

لكلّ عدد طبيعي عدا العدد 1، قاسمان طبيعيّان على الأقل هما العدد 1 والعدد نفسه.

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

- القول « k قاسمٌ مشترك للعددين a و b » يعني « k قاسمٌ لكلٍّ من العددين a و b ».
- القول « العددان a و b أوليّان فيما بينهما » يعني « 1 هو القاسم الطبيعي المشترك الوحيد لهما ».

مثال

- $3 = \frac{18}{6}$ و $4 = \frac{24}{6}$، فالعدد 6 قاسم مشترك للعددين 18 و 24، فالعددان 18 و 24 ليسا أوليَّيْن فيما بينهما.
- قواسم العدد 8 هي 1 و 2 و 4 و 8. وقواسم العدد 15 هي 1 و 3 و 5 و 15. العدد 1 هو القاسم المشترك الوحيد للعددين 8 و 15، فهذان العددان أوليان فيما بينهما.

القاسم المشترك الأكبر

أكبر القواسم المشتركة للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر لهما، ويُرمز إليه $\mathrm{GCD}(a,b)$.

مثال

قواسم العدد 24 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

قواسم العدد 36 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

القواسم المشتركة للعددين 24 و 36 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 36 هو 12. ونكتب $\mathrm{GCD}(24,36)=12$.

1

خواصّ

- $GCD(a,a)=a$.
- إذا كان b قاسماً للعدد a، كان $GCD(a,b)=b$.
- القول « a و b أوليّان فيما بينهما » يعني القول « $GCD(a,b)=1$ »

خوارزمية الطرح المتتالي

القاسم المشترك الأكبر وخوارزمية الطرح المتتالي

رأينا سابقاً أنَّ $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$ في حالة $a \geq b$. يمكن استعمال هذه الخاصّة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 14 964 و 11 223 على الوجه الآتي:

① أكمل ما يرد في الخطوات 2 و 3 و 4 على غرار ما يرد في الخطوة1:

الخطوة .1 $14\,964-11\,223=3741$.

إذن $GCD(14964\ ,\ 11223)=GCD(11223\ ,\ 3741)$

الخطوة .2 $11\,223-3741=\cdots\cdots$.

إذن $GCD(11223\ ,\ 3741)=GCD(\cdots\cdots\ ,\ 3741)$

الخطوة .3 $\cdots\cdots-3741=\cdots\cdots$.

إذن $GCD(\cdots\cdots\ ,\ 3741)=GCD(\cdots\cdots\ ,\ 3741)$

الخطوة .4 $\cdots\cdots-3741=\cdots\cdots$

② أكمل حتى تجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 14 964 و 11 223.

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي:

- نطرح أصغر العددين وليكن b من أكبرهما وليكن a.
- نستمر بالطرح معتمدين المبدأ $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$.
- القاسم المشترك الأكبر هو آخر ناتج طرح غير معدوم.

مفردات لغوية

عموماً، يسمّى تكرار العمليات ذاتها في عدد من الخطوات إلى حين الوصول إلى حلّ مسألة **خوارزمية**.

مثال جِدْ القاسم المشترك الأكبر للعددين 693 و 154 باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي.

الحلّ

في الجدول الآتي ينتج كلّ عمود من سابقه بطرح العدد الأصغر من العدد الأكبر والإبقاء على العدد الأصغر في موضعه:

$693 - 154 = 539$

a	693	539	385	231	77	77	0
b	154	154	154	154	154	77	77

آخر ناتج طرح غير معدوم هو 77 ، فالقاسم المشترك الأكبر لهذين العددين هو 77.

الخوارزمية الإقليدية (خوارزمية القسمة المتتالية)

القاسم المشترك الأكبر والقسمة الإقليدية (مع الباقي)

يصورالجدول ① خطوات حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 512 و 224 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي.

①

الخطوة	a	b	$a-b$
1	512	224	288
2	288	224	64
3	224	64	160
4	160	64	96
5	96	64	32
6	64	32	32
7	32	32	0

②

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	512	224	64
2	224	64	
3			

لنبحث كيف نحصل على الجدول ② الذي يسرِّع حساب القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين.

1. اقرأ في الجدول ① القاسم المشترك الأكبر للعددين 512 و 224 .
2. اشرح لماذا الأسطر الملونة بالأحمر تسمح بكتابة $512 = 2 \times 224 + 64$.

   أكمل: « 64 هو .... القسمة الإقليدية للعدد ..... على العدد ..... ».

   لاحظ إذن كيف حُرِّر السطر الملون بالأحمر في الجدول ②
3. تابع هذا السلوك لتكمل السطر الملون بالأخضر من الجدول ②.
4. أكمل السطر الملون بالأزرق من الجدول ②.
5. ما القاسم المشترك الأكبر للعددين 512 و 224 ، بالاستعانة بالجدول ①؟

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b $(a>b)$ باعتماد خوارزمية إقليدس:

- نقسم a على b إقليدياً (التقسيم مع الباقي). ليكن $a=k\times b+r$ $(0\le r<b)$
- نكرّر الخطوة السابقة مع العددين b و r $(b>r)$.
- نتابع وفق هذا النمط حتى نصل إلى الخطوة التي يصبح فيها باقي القسمة صفراً.
- القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقٍ غير معدوم.

مثال

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 10 165 و 3 745 باعتماد خوارزمية إقليدس.

الحل

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة	العملية
①	10165	3745	2675	$10165=2\times3745+2675$
②	3745	2675	1070	$3745=1\times2675+1070$
③	2675	1070	$\boxed{535}$	$2675=2\times1070+535$
④	1070	535	0	$1070=2\times535+0$

آخر باقٍ غير معدوم هو 535، فالقاسم المشترك الأكبر لهذين العددين هو 535.

ممّا سبق يمكننا استنباط طريقة مختصرة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b $(a>b)$ حيث نقسّم إقليديّاً العدد الأكبر على الأصغر لنحصل على باقي القسمة r ثمّ نحتفظ بالعددين b و r $(b>r)$ لنكرّر معهما الخطوة السابقة حتّى نصل إلى خطوة يكون باقي القسمة فيها معدوماً، عندئذٍ القاسم المشترك الأكبر هو المقسوم عليه في هذه الخطوة. مثلاً :

$$10165\to3745\to2675\to535\to0$$

اكتساب معارف

كيف نتعرف عددين أوليين فيما بينهما؟

مثال

في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، بيّن إذا كان العددان أوليَّيْن فيما بينهما. علّلْ إجابتك.

① 175 و 380 ② 39 و 55

الحلّ

① في حالة النفي، يكون سرد مثال كافياً لتأكيد النفي. هنا، يكفي إيجاد قاسم مشترك واحد لهذين العددين يختلف عن 1. العددان 175 و380 ليسا أوليين فيما بينهما، لأنَّ العدد 5 قاسم مشترك لهما.

② لتأكيد أنَّ عددين هما أوليّان فيما بينهما، يكفي إثبات أنَّ القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1. في هذا المثال:

القواسم الطبيعية للعدد 39 هي 1 و 3 و 13 و 39.

القواسم الطبيعية للعدد 55 هي 1 و 5 و 11 و 55.

القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1، فهذان العددان أوليّان فيما بينهما.

تحقق من فهمك

① في كلٍّ مما يأتي، سمِّ قاسماً مشتركاً للعددين a و b، ثم بسِّطْ الكسر $\frac{a}{b}$.

① $a=18$, $b=32$ ② $a=18$, $b=27$

③ $a=12$, $b=39$ ④ $a=35$, $b=100$

② بسِّطْ ذهنياً، كلّاً من الكسور الآتية:

① $\frac{45}{35}$ ② $\frac{126}{88}$ ③ $\frac{24}{39}$ ④ $\frac{120}{40}$

تدرّبْ

① في كلٍّ من الحالات الآتية، اكتب لائحة بقواسم كلٍّ من العددين a و b، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر لهما.

① $a=18$, $b=24$ ② $a=35$, $b=28$ ③ $a=65$, $b=39$

② أجب ذهنياً، إن كان العددان a و b أوليين فيما بينهما أم لا.

① $a=4$, $b=7$ ② $a=63$, $b=54$ ③ $a=45$, $b=100$

③ ليكن العددان 60 و 36.

① اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم التسعة للعدد 36 والقواسم الاثني عشر للعدد 60.

② اكتب، بترتيب تصاعدي، القواسم المشتركة للعددين 36 و 60.

③ استنتج $GCD(60,36)$ أي القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين.

③ اكتب، بترتيب تصاعدي، قواسم $GCD(60,36)$. مما تكون قد تحققت؟

1

3 كسور مختزلة

نشاط «اختصار الكسر إلى أبسط صيغة»

.1 اختصارات متتالية

أوجد الكسور المساوية لكلٍّ من الكسور الآتية وذلك بإجراء اختصارات متتالية، مستفيداً من قابلية القسمة، ثم دُلَّ على الكسر المكتوب بأبسط صيغة والذي يساوي كلٍّ منها.

① $\frac{21}{18}$ ② $\frac{15}{45}$ ③ $\frac{60}{40}$ ④ $\frac{18}{63}$

.2 الاختصار والقاسم المشترك الأكبر

ليكن الكسر $F = \frac{1595}{2639}$

.1 أيمكن الاستفادة من قابلية القسمة لاختصار هذا الكسر؟

.2 أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1595 و 2639 بالطريقة التي تراها مناسبة، استنتج أبسط صيغة للكسر F.

تعلّم

فيما يأتي، a و b يرمزان إلى عددين صحيحين موجبين تماماً.

كسرٌ مختزل

القول « $\frac{a}{b}$ كسرٌ مختزل » يعني « a و b أوليان فيما بينهما ».

وبهذا، فإنَّ الكسر المختزل غير قابل للاختصار.

مثال $\frac{8}{15}$ كسرٌ مختزل، إذ رأينا في الفقرة السابقة أنَّ العددين 8 و 15 أوليّان فيما بينهما.

خاصة

إذا اختصرنا الكسر، بتقسيم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما، حصلنا على كسرٍ مختزل.

تكمن أهمية هذه الخاصة، في الحصول على الكسر المختزل بخطوة واحدة.

مثال وجدنا في مثالٍ سابق أنَّ $\mathrm{GCD}(24,36) = 12$، إذن: $\frac{24}{36} = \frac{2\times\cancel{12}}{3\times\cancel{12}} = \frac{2}{3}$

لاحظ أنَّ $\frac{2}{3}$ كسر مختزل.

اكتساب معارف

كيف تختصر لتحصل على كسر باعتماد قابلية القسمة؟

مثال

اشرح لماذا يقبل الكسر $\frac{60}{45}$ الاختصار، ثم جِدْ الكسر المختزل الذي يساويه.

الحل

يكفي إيجاد قاسم مشترك واحد لحدّي هذا الكسر يختلف عن 1. في الحقيقة، يقبل كلٌّ من بسط الكسر ومقامه القسمة على العدد 5، فالكسر المعطى ليس مختزلاً.

$$\frac{60}{45}=\frac{12\times\cancel{5}}{9\times\cancel{5}}=\frac{12}{9}$$

الكسر $\frac{12}{9}$ هو أيضاً قابل للاختصار فالعدد 3 قاسم لحدّيه.

$$\frac{12}{9}=\frac{4\times\cancel{3}}{3\times\cancel{3}}=\frac{4}{3}$$

4 و 3 أوليّان فيما بينهما، فالكسر $\frac{4}{3}$ هو الكسر المختزل المساوي للكسر $\frac{60}{45}$.

كيف تختصر لتحصل على كسر مختزل باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي؟

مثال

جِدْ الكسر المختزل المساوي للكسر $\frac{693}{154}$.

الحل

وجدنا في مثال سابق أنّ القاسم المشترك الأكبر للعددين 693 و 154 باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي هو 77.

لإيجاد الكسر المختزل للكسر المفروض، نقسم كلاً من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

$$\frac{693}{154}=\frac{77\times9}{77\times2}=\frac{9}{2}$$

كيف تختصر لتحصل على كسر مختزل باعتماد الخوارزمية الإقليدية ؟

مثال

أوجد الكسر المختزل المساوي للكسر $\frac{10165}{3745}$.

الحل

وجدنا في مثال سابق أنّ القاسم المشترك الأكبر للعددين 10165 و 3745 هو 535. لإيجاد الكسر المختزل للكسر المعطى، نقسم كلاً من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

$$\frac{10165}{3745}=\frac{535\times19}{535\times7}=\frac{19}{7}$$

1

تحقّق من فهمك

① أي الكسور الآتية مختزل وأيّها يقبل الاختصار؟ علِّلْ إجابتك.

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{28}{32}$ ③ $\frac{33}{72}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{10}{7}$ ⑥ $\frac{18}{45}$

② إذا علمت أنَّ $GCD(312\ ,\ 546) = 78$ فأوجد الكسر المختزل المساوي للكسر $\frac{312}{546}$.

تدرّب

① لدينا العددان $A = \frac{7}{9} \times \frac{3}{5} - \frac{12}{5}$ و $B = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$

احسب كلّاً من العددين واكتبه كسراً مختزلاً.

② لدينا العددان $A = \frac{117}{63}$ و $B = \left(3 - \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right)$

1. اختزل الكسر A.

2. اختزل الكسر B.

3. احسب $A - B$.

③ اشرح لماذا يقبل الكسر $\frac{228}{144}$ الاختصار، وبسِّطه حتى يصبح مختزلاً.

④ الجذر التربيعي لعدد موجب

نشاط « إيجاد الجذر التربيعي لعدد موجب »

1. إشارة مربع عدد

① احسب مربعات الأعداد الصحيحة من 0 حتى 15.

② استنتج مربعات الأعداد $0.2\ ,\ 1.4\ ,\ -0.07\ ,\ 0.013$

③ اشرح لماذا مربع عدد عادي هو عدد موجب.

من المفيد حفظ مربعات الأعداد الصحيحة من 0 حتى 20.

2. الجذور التربيعية وخواصها

الرمز $\sqrt{a}$ يدل على الجذر الموجب للعدد a.

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

• $\left(\sqrt{3}\right)^2$ • $\left(\sqrt{124}\right)^2$ • $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلّاً من الأعداد الآتية، ثم أكِّدْ طبيعة العدد، هل هو صحيح؟ هل هو عادي عشري؟ هل هو عادي غير عشري؟

• $\sqrt{81}$ • $\sqrt{1.21}$ • $\sqrt{0}$ • $\sqrt{1}$ • $\sqrt{2\,500}$ • $\sqrt{\dfrac{1}{25}}$

③ اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

• $\sqrt{8^2}$ • $\sqrt{1.5^2}$ • $\sqrt{\left(\dfrac{11}{6}\right)^2}$

④ الأعداد الآتية ليست عادية. احصر كلاً منها بين عددين صحيحين متتاليين.

• $\sqrt{7}$ • $\sqrt{18}$ • $\sqrt{150}$

3. عمليات مع الجذور التربيعية

① اختزل كلّاً من العبارات الآتية:

$A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ و $B = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ و $C = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$

② انشر واختزل كلاً من العبارات الآتية:

$D = \left(\sqrt{6} + 1\right)\sqrt{6}$ و $E = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(4 - \sqrt{3}\right)$ و $F = 2\sqrt{5}\left(3 - \dfrac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

③ أنجز الجداءات الآتية: $G = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$ و $H = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ و $I = -4\sqrt{11} \times 2.5\sqrt{11}$

1

تعلّم

تعريف

الجذر التربيعي لعددٍ **موجبٍ** a، هو عددٌ مربعه يساوي a.

وفي حالة $a > 0$ يكون للعدد a جذران تربيعيان أحدهما **موجب** نرمز إليه بالرمز $\sqrt{a}$ والآخر سالب هو $-\sqrt{a}$. أمّا في حالة $a = 0$ فيكون $\sqrt{0} = 0$. ويُقرأ $\sqrt{a}$ «الجذر التربيعي للعدد a »

مثال حالة $\sqrt{a}$ عدد صحيح

نعلم أنَّ	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
إذن	$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$

مثال حالة $\sqrt{a}$ عدد عادي

- $\sqrt{0.16} = 0.4$ لأنَّ $(0.4)^2 = 0.16$
- $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ لأنَّ $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

مثال حالة $\sqrt{a}$ عدد غير عادي

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ أعداد غير عادية والرمز $\sqrt{\ }$ في الآلة الحاسبة يعطي قيمة تقريبية لهذه الأعداد

$\sqrt{2} \approx 1.414214$ $\quad$ $\sqrt{3} \approx 1.732051$ $\quad$ $\sqrt{13} \approx 3.605551$

خاصة (1)

أياً كان العدد **الموجب** a فلدينا $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

الإثبات. لدينا، حسب التعريف، $\sqrt{a}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a. وهذا يعني $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

مثال

- $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$
- $\left(\sqrt{1.32}\right)^2 = 1.32$
- $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{7}{3}$

خاصة (2)

أياً كان العدد **الموجب** a فلدينا $\sqrt{a^2} = a$.

الإثبات.

لدينا، حسب التعريف، $\sqrt{a^2}$ هو العدد الموجب الذي مربعه a^2.

ولمّا كان a عدداً موجباً مربعه يساوي a^2، فنستنتج أنّ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

مثال

- $\sqrt{5^2} = 5$
- $\sqrt{(11.3)^2} = 11.3$
- $\sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2} = \frac{13}{3}$

خاصة (3)

جداء ضرب الجذرين التربيعيين لعددين موجبين يساوي الجذر التربيعي لجداء ضرب هذين العددين. ففي حالة a و b عددين موجبين : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ إذن أيضاً

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

الإثبات.

$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$ وحسب تعريف الجذر التربيعي، $\sqrt{a \times b}$ هو العدد الموجب الوحيد الذي مربعه $a \times b$، نستنتج أنَّ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

مثال

- $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$

خاصة (4)

خارج قسمة جذرين تربيعيين لعددين موجبين يساوي الجذر التربيعي لخارج قسمة هذين العددين. ففي حالة a و b عددين موجبين و $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ إذن أيضاً

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

إثبات هذه الخاصة مماثل لإثبات الخاصة (3)

مثال

- $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$

الخاصتان السابقتان غير صحيحتين بالنسبة إلى عمليتي الجمع والطرح.

مثال

- $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ في حين $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ ، إذن

$$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

- $\sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ بينما $\sqrt{169} - \sqrt{144} = 13 - 12 = 1$ ، إذن

$$\sqrt{169-144} \neq \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

1

اكتساب معارف

كيف نكتب العدد $a\sqrt{b}$ بصيغة $\sqrt{c}$؟

مثال اكتب العدد $2\sqrt{3}$ بصيغة $\sqrt{c}$، حيث c عدد طبيعي.

الحل. لدينا $a=2, b=3$.

① نستعمل الخاصة $a=\sqrt{a^2}$ فنكتب $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

② نستعمل الخاصة $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ فنكتب $2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$

كيف نكتب العدد $\sqrt{c}$ بصيغة $a\sqrt{b}$؟

مثال اكتب العدد $\sqrt{72}$ بصيغة $a\sqrt{b}$، حيث a و b عددان طبيعيان.

الحل.

① نستعرض المربعات التي تصغر العدد 72:

$4=2^2$، $9=3^2$، $16=4^2$، $25=5^2$، $36=6^2$، $49=7^2$، $64=8^2$.

② نختار منها قواسم العدد 72: $4=2^2$، $9=3^2$، $36=6^2$.

③ نكتب $72=a^2\times b$ حيث a^2 هو أكبر الأعداد الواردة في ②: $72=36\times 2=6^2\times 2$

④ نكتب $\sqrt{72}=\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$:

$\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times 2}=\sqrt{6^2}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

لاحظ أنَّ كلاًّ من 4 و 9 يقسم 72، فيمكن أن نكتب:

$$\sqrt{72}=\sqrt{2^2\times 18}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{18}=2\sqrt{18}$$

أو

$$\sqrt{72}=\sqrt{3^2\times 8}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{8}=3\sqrt{8}$$

كيف نزيل الجذر من مقام كسر؟

مثال اكتب العدد $\frac{2}{\sqrt{3}}$ بصيغة كسر مقامه عدد صحيح.

الحلّ

① لتحويل الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ إلى كسرٍ مقامه عدد صحيح، نضرب كلاًّ من بسطه ومقامه بالعدد $\sqrt{b}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

② نستعين بالخاصة $\sqrt{b}\times\sqrt{b}=b$، أي $\left(\sqrt{b}\right)^2=b$: $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

كيف ننشر ونختزل؟

مثال

1. اختزل المقدار $S = 2\sqrt{75} - \sqrt{27}$ إلى الصيغة $S = a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و b أصغر عدد ممكن.

2. انشر الجداء $P = \left(5 - 3\sqrt{2}\right)\left(3 + \sqrt{2}\right)$

الحل:

1. ① نبحث عن أصغر قاسم مشترك للعددين 27 و 75 يغاير 1: هنا 3. $S = 2\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{9 \times 3}$

② نلاحظ أنَّ العاملين الآخرين 25 و 9 هما مربعان كاملان، أي: $25 = 5^2$ و $9 = 3^2$ إذن

$$S = 2\sqrt{5^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3}$$

③ نستعين بالخاصة $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$:

$$S = 2\sqrt{5^2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$

④ نستعين بالخاصة $\sqrt{x^2} = x$ (x موجب):

$$S = 2 \times 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (10-3)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

2. ① نستعين بجداء ذي حدين بمثله $(a+b)(c+d)$

$$P = 5 \times 3 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \times 3 - 3\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

② $3\sqrt{2} \times 3 = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$ فنجد:

$$P = 15 + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 6 = 9 - 4\sqrt{2}$$

تحقّق من فهمك

① اكتب بصيغة $\sqrt{a}$ حيث a عدد طبيعي.

❶ $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ❷ $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$ ❸ $\sqrt{7} \times \sqrt{13}$

② اكتب ما يأتي بشكل عدد صحيح.

❶ $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ ❷ $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$ ❸ $\sqrt{7} \times \sqrt{63}$

1

تدرّب

① اكتب بصيغة $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ حيث a و b عددان صحيحان موجبان.

❶ $\sqrt{10}$ ❷ $\sqrt{38}$ ❸ $\sqrt{15}$

② اكتب بصيغة جذر تربيعي لكسر مختزل.

❶ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ ❷ $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{8}}$ ❸ $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}}$

③ اكتب بأبسط ما يمكن.

❶ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ❷ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ❸ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$

④ أعد كلاً من المقادير الآتية إلى أبسط شكل ممكن.

❶ $A=3\sqrt{2}-4+5\sqrt{2}+1$ ❷ $B=3\sqrt{7}-3\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$ ❸ $C=2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}\times4\sqrt{2}$

⑤ فيما يأتي، انشر ثم بسِّط المقدار

❶ $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ ❷ $\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)$ ❸ $\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(4+2\sqrt{3}\right)$

⑥ اكتب العدد $3\sqrt{8}$ بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

⑦ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

❶ $7\sqrt{5}$ ❷ $2\sqrt{3}$ ❸ $4\sqrt{2}$ ❹ $5\sqrt{6}$

⑧ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد صحيح موجب.

❶ $\frac{\sqrt{48}}{4}$ ❷ $\frac{\sqrt{50}}{5}$ ❸ $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}$ ❹ $\frac{\sqrt{108}-\sqrt{27}}{3}$

⑨ عبِّرْ ذهنياً عن الكسور الآتية بكسور مختزلة.

❶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ❷ $\frac{\sqrt{1}}{4}$ ❸ $\sqrt{\frac{121}{36}}$ ❹ $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ يساوي

① $\frac{20}{48}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$

(2) مساحة قرص دائري نصف قطره 5 cm تساوي $25\pi\ cm^2$، هذه المساحة هي

① عدد غير عادي ② عدد عادي ③ عدد عشري

(3) القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 63 هو

① 3 ② 9 ③ 12

(4) القاسم المشترك الأكبر للعددين 126 و 252 هو

① 3 ② 9 ③ 126

(5) أيُّ الكسور الآتية مختزل

① $\frac{224}{330}$ ② $\frac{17}{35}$ ③ $\frac{378}{465}$

(6) العدد $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

① صحيح ② عادي غير صحيح ③ غير عادي

(7) العدد $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{300}$ يساوي

① $3\sqrt{3}$ ② $-3\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{5}$

(8) عند حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3105 و 920 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي، نجد نواتج الطرح:

① 2185, 1265, 345, 575, 230, 115, 0

② 345, 230, 115, 0

③ 1265, 390, 95, 10, 5, 0

(9) باستعمال خوارزمية إقليدس، القاسم المشترك الأكبر هو:

① أول باقٍ غير معدوم نحصل عليه.

② آخر باقٍ غير معدوم نحصل عليه.

③ آخر خارج قسمة غير معدوم نحصل عليه.

(10) القاسم المشترك الأكبر للعددين 942 و 774 هو ① 2 ② 6 ③ 5

1

2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) $\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{6}{5}$ يساوي ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{4}{15}\times\frac{5}{6}$ ③ $\frac{6}{5}\times\frac{-15}{4}$

(2) $\frac{4}{7}\times\frac{21}{2}-\frac{1}{2}$ هو عدد ① عشري ② عادي ③ غير عشري

(3) $\frac{16}{9}\times\frac{3}{4}$ هو عدد ① عشري ② عادي ③ غير عشري

(4) ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3cm يساوي

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm ② $\sqrt{\frac{27}{4}}$ cm ③ 2.598 cm

(5) القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 45 يساوي

① القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 62

② القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 107×45

③ الواحد.

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادّعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) $\frac{5}{13}$ عدد عشري.

(2) 0.25 عدد عادي.

(3) $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\times\pi$ عدد غير عادي.

(4) $\sqrt{7}=\frac{7}{\sqrt{7}}$

(5) العددان 60 و 120 لهما نفس العدد من القواسم.

(6) 15 هو قاسم مشترك للعددين 45 و 60، إذن 15 يقسم 105 أيضاً.

(7) a و b يرمزان إلى عددين صحيحين موجبين تماماً. إذا كان b قاسماً للعدد a، كان b القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

(8) القاسم المشترك الأكبر للعدد 127 وأحد مضاعفات العدد 7 يمكن أن يكون العدد 7.

(9) نصف $\sqrt{36}$ يساوي $\sqrt{18}$.

(10) $\frac{121110987654321}{123456789101112}$ كسرٌ مختزل. (اجمع الأرقام في كل من البسط والمقام).

4 لدينا الأعداد الآتية: ① $\frac{-15}{7}\times\frac{7}{5}$ ② $3\times\frac{20}{9}$ ③ $\frac{2}{3}\div\frac{4}{3}$ ④ $\frac{-10}{3}\div\frac{5}{7}$

احسب ناتج كلٍّ منها بصيغة كسر. ثم حدّد أيٌّ من النواتج التي حصلنا عليها عدد صحيح؟

5 جميع الأعداد الآتية عشرية ما عدا واحداً منها. اشرح لماذا.

① $A=\frac{153}{10}$ ② $B=-\frac{7}{4}$ ③ $C=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ④ $D=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

6 عبِّرْ عن كلٍ من الجمل الثلاث الآتية بصيغة «العدد ... قاسم للعدد... »

① 75 مضاعف للعدد 15 . ② 12 يقسم 24 . ③ 35 يقبل القسمة على 7 .

7 حسبت سلمى: ① ثلاثة أمثال $\sqrt{5}$. ② نصف $\sqrt{18}$. ③ مثلي جداء العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$.

فكانت النواتج:

① $\sqrt{45}$. ② 9. ③ $\sqrt{234}$.

قل مع التعليل إن كنت متفقاً مع هذه الإجابات أم لا.

8 أنا عددٌ صحيحٌ، مربعي يساوي ثلاثة أمثال 12 وليس لي جذرٌ تربيعي، فمن أنا؟

9 $ABCD$ مستطيل، بعداه $AB=\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)$ cm و $BC=\left(\sqrt{80}-\sqrt{45}\right)$ cm. احسب محيط هذا المستطيل، ثم اكتبه بالصيغة $a\sqrt{5}$.

10 اعتمد على خواصّ قابلية القسمة لإعادة كلٍ من الكسور الآتية إلى صيغة كسر مختزل.

① $a=\frac{90}{126}$ ② $b=\frac{495}{270}$ ③ $c=\frac{168}{264}$

11 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي ثم باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b. هل هذان العددان أوليان فيما بينهما؟ لماذا؟

❶ $a=357$ و $b=204$ ❷ $a=2463$ و $b=1036$

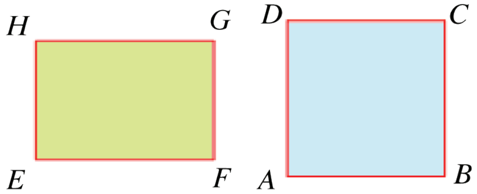
12 اكتب كلّ عدد بالصيغة $a\sqrt{b}$ مع a عدد صحيح و b عدد صحيح موجب وأصغر ما يمكن.

❶ $A=9\sqrt{7}-2\sqrt{28}-5\sqrt{63}$ ❷ $B=\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$

13 اكتب كلاً من الكسور الآتية بمقامات خالية من الجذور:

❶ $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ❷ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}}$ ❸ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ❹ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}}$

لإحراز تقدّم



14 $ABCD$ مربع طول ضلعه $AB=\sqrt{20}+1$، و $EFGH$ مستطيل بعداه $EF=\sqrt{45}-1$ و $FG=\sqrt{5}+3$.

أثبت أنَّ محيطي هذين الشكلين متساويان.

15 معادلة ومتابعة عمليات

1. أنجز حساب $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\right)$، واكتب الناتج بصيغة كسر مختزل.

2. يملك شخص قطعة أرض. في عام 2012 باع ربعها، وفي عام 2013 باع أربع أخماس الباقي.

① ما كسر مساحة الأرض التي باعها عام 2013؟

② ما كسر مساحة الأرض الباقية بعد عمليتي البيع؟

③ بقي لدى المالك بعد عمليتي البيع ستة هيكتارات، ما مساحة ما كان يملك قبل البيع؟

16 العدد π

من المعلوم أنَّ π هو عدد غير عادي (هو خارج قسمة طول قوس كل دائرة على طول قطرها) غير أنَّ بعض الكسور تعبر عن قيم تقريبية لهذا العدد. منها:

- $\frac{22}{7}$ (من قبل أرخميدس، عالم إغريقي من القرن الثالث قبل الميلاد)
- $\frac{355}{113}$ (من قبل زي شونكزي، عالم صيني نحو القرن الخامس الميلادي)

1. استعن بآلة حاسبة لحساب القيمة التقريبية لكل من الكسور السابقة لستة أرقام عشرية.

2. أثبت أنَّ كلاً من الكسور السابقة هو كسر مختزل.

17 طبيعة عدد

لدينا العدد $A=\frac{1530}{1360}-\frac{3}{8}$

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1530 و 1360 ثم اكتب الكسر المختزل المساوي للكسر $\frac{1530}{1360}$

2. احسب A وضعه بصيغة كسرٍ مختزل.

3. هل A عدد عشري؟ هل هو عدد عادي؟ علِّلْ إجاباتك.

18 مربع

$ABCD$ مستطيل. $AB = \left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right)$ cm و $BC = \sqrt{48}$ cm.

1. أثبت أنَّ $ABCD$ هو مربع.

2. احسب كلاً من محيط ومساحة هذا المربع.

19 مع الأعداد الأولية

العدد الأولي هو كلّ عدد صحيح موجب له قاسمان طبيعيان مختلفان فقط، هما 1 والعدد نفسه.

مثلاً: 3 عدد أولي، لأنه يقبل بالضبط قاسمين طبيعيين هما 1 و3.

1 ليس أولياً، لأنْ ليس له سوى قاسم طبيعيّ واحد هو 1.

1. هل الصفر عدد أولي؟ لماذا؟

2. اكتب الأعداد الأولية المحصورة تماماً بين 1 و10.

3. لدينا العددان $a = 2 \times 3 \times 5$ و $b = 2^2 \times 5 \times 7$ وهما بصيغة مضاريب لأعدادٍ أولية.

أجب عن الأسئلة الآتية دون حساب a و b.

① هل العدد 2 قاسمٌ للعدد b؟

② هل العدد 6 قاسمٌ للعدد a؟

③ هل العدد 7 قاسمٌ للعدد a؟

④ ما القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

20 تجميع أعداد حسب طبيعتها

لدينا الأعداد: $\frac{\pi}{4},\ 10^{-2},\ \frac{27}{100},\ \frac{5}{11},\ 7,\ -\frac{5}{2},\ 10^{5},\ -\frac{1}{4},\ 0.3,\ 25\pi,\ -\frac{48}{6},\ \frac{4}{3}$

ضع هذه الأعداد حسب طبيعتها في أماكنها من الجدول الآتي:

أعداد صحيحة										
أعداد عادية										
أعداد عشرية										
أعداد غير عادية										

2

الوحدة الثانية

قوى الأعداد العادية- الحساب بالرموز

1 قوة عدد عادي

2 النشر والتحليل

3 مطابقات شهيرة

في فترة حكم الخليفة المأمون (833-813) اجتمعت في بيت الحكمة في بغداد ثُلّة من العلماء المهمّين ذوي الأصول والثقافات المختلفة، والذين جمعوا في علمهم مجمل معارف عصرهم من علوم الهند والفرس والإغريق.

ومن بين هؤلاء وفي مقدّمتهم كان محمد بن موسى الخوارزمي الذي وضع حوالي عام 825 كتاباً مهمّاً في الرياضيات، بقي زمناً طويلاً يُعدّ مرجعاً:

"الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة"

اعتُمدتْ تسمية "الجبر" في الترجمات اللاتينية لهذا الكتاب، ثُمّ انتقلت إلى اللغات الأخرى على حالها: *Algebra* أو *Algèbre* .... تعبّر هذه الكلمة في العربية عن عملية إصلاح معادلة عن طريق إضافة المقدار نفسه إلى طرفيها بهدف حذف الحدود المسبوقة بإشارة (−)، أمّا المقابلة فهي تنصّ على طرح مقادير متماثلة من طرفي معادلة بهدف جعل الأمور أكثر تناظراً. فمثلاً إذا استعملنا لغة هذا العصر، وتأمّلنا المعادلة

$$4x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + 2$$

استعملنا الجبر لنكتبها بالصيغة المُكافئة

$$4x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 2$$

واستعملنا المقابلة لتصبح بالشكل

$$x^2 + 1 = 2x.$$

يعود إلى الخوارزمي فضل نقل الصفر من الرياضيات الهندية إلى العربية ومنها إلى العالم. لقد ميّز الخوارزمي ستة أصناف من المعادلات من الدرجة الثانية، وشرح طرائق حلّها، التي كانت في أغلبها هندسية.

سندرس في هذه الوحدة طرائق نشر وتحليل العبارات الجبرية، وأهم المطابقات الشهيرة التي تفيد في إجراء هذه العمليات.

2

قوى الأعداد العادية-الحساب بالرموز

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. رمز القوة

الكتابة 4^3 تعني:

① 4×3 ② $4\times 4\times 4$ ③ $3\times 3\times 3\times 3$

2. جداء قوتين للعدد 10

$10^3\times 10^{-4}$ يساوي:

① 10^{-12} ② -10 ③ 0.1

3. كتابة عدد عشري بالصيغة المعيارية

الصيغة المعيارية للعدد 450.1 هي:

① 4.501×10^2 ② 4501×10^{-1} ③ 0.4501×10^3

4. ترميز تعبير لفظي

في حالة n عدد صحيح، مربع العدد الصحيح التالي للعدد n هو:

① n^2+1 ② $2(n+1)$ ③ $(n+1)^2$

5. اختزال مجموع

كتابة أخرى للمقدار $2x+3x$ هي:

① $6x^2$ ② $5x^2$ ③ $5x$

6. نشر واختزال عبارة رمزية

بعد نشر واختزال المقدار $(2x+5)(3x-4)$، نحصل على:

① $6x^2-20$ ② $5x+1$ ③ $6x^2+7x-20$

7. تحليل عبارة رمزية إلى جداء مضاريب

يمكن تحليل المقدار $3x^2-12x$ إلى:

① $3x(x-12)$ ② $-9x$ ③ $3x(x-4)$

1 قوّة عدد عادي

نشاط « إيجاد قوة عدد عادي »

.1 ربح متسابق

في إحدى المسابقات التلفزيونية، طُرح على متسابقٍ 15 سؤالاً. يربح المتسابق 3 نقاط إذا أجاب عن السؤال الأول. بعدئذ، عند كلّ إجابة إضافية صحيحة يصبح ربح المتسابق ثلاثة أمثال ربحه السابق.

① استعمل رمز القوة للتعبير عن ربح المتسابق في كلٍّ من الحالات الآتية:

- أداء إجابتين صحيحتين
- أداء 5 إجابات صحيحة
- أداء 8 إجابات صحيحة

② ما أكبر ربح يمكن أن يحققه المتسابق؟

③ اكتب كلّاً من الأعداد الآتية بالصيغة 3^n حيث n عدد صحيح موجب.

❶ $3\times3\times3\times3$ ❷ $3^2\times3^4$ ❸ 3×3^5

استعمل تعريف القوّة. مثلاً: $3^5=3\times3\times3\times3\times3$

.2 أُسس سالبة

① 1 نانومتر يعادل 10^{-6} mm ونرمزه nm .

انسخ ثم أكمل: $1\text{ nm}=\dfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}\text{ mm}=0.\cdots\cdots\cdots\text{ mm}$.

② اكتب 2^{-4} بصيغة كسر ، ثم بصيغة كسر عشري.

③ اكتب بصيغة قوة عدد صحيح كلاً من الأعداد: • $\dfrac{1}{7^2}$ • $\dfrac{1}{10^8}$ • $\dfrac{1}{5^{-3}}$ • $\dfrac{1}{10^{-9}}$

إذا كان a عدداً عادياً غير معدوم و n عدداً طبيعياً، كان $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ويكون a^{-n} مقلوب a^n.

.3 القوى والعمليات

① استفد من تعريف القوة لتكتب كلّاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة عدد صحيح:

- $2^3\times2^{-5}$
- $4^{-3}\times4^9$
- $\dfrac{7^6}{7^4}$
- $\dfrac{5^5}{5^{-2}}$
- $\left(3^5\right)^{-3}$
- $\left(2^{-5}\right)^5$
- $\dfrac{10^3}{5^3}$
- $2^3\times5^3$

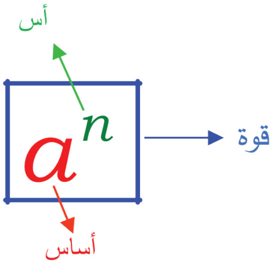
② إذا كان a و b عددين عاديين غير معدومين، وإذا كان n عدداً صحيحاً فاكتب بصيغة قوة لعدد عادي كلاً مما يلي:

- $a^n\times a^m$
- $\dfrac{a^n}{a^m}$
- $\left(a^m\right)^n$
- $a^n\times b^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n}$

تعلّم

تعريف.

إذا كان a عدداً عادياً موجباً، وكان n عدداً صحيحاً موجباً، فعندئذٍ يرمز a^n إلى القوة من المرتبة n للعدد a ويُقرأ « a أس n ». ويعرّف كالآتي:



* في حالة $a \neq 0$: $a^0 = 1$
* في حالة $n = 1$: $a^1 = a$
* في حالة $n \geq 2$: $a^n = a \times a \times \cdots \cdots \times a$ (n مضروباً)
* في حالة $a \neq 0$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. وبذا يكون a^{-n} مقلوب a^n.

يسمى a^n القوة من المرتبة n للعدد a، ويسمى a أساس هذه القوة، ويسمى n أسّها.

مثال

* $12^0 = 1$ * $7^1 = 7$ * $3^2 = 3 \times 3 = 9$
* $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$ * $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

حالة خاصة: قوى العدد عشرة

أياً كان العدد الطبيعي n: $10^n = 10 \cdots \cdots 0$ (n صفراً) و $10^{-n} = 0.0 \cdots 01$ (n صفراً)

مثال

* $10^6 = 1\ 000\ 000$ (مليون) • $10^{-3} = 0.001$ (واحد بالألف)

قواعد الحساب

a و b يرمزان إلى عددين عاديين غير معدومين و m و n يرمزان إلى عددين صحيحين.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$
2. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $\qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

مثال

* $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$ * $\dfrac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^6$ * $(7^2)^4 = 7^{2\times4} = 7^8$

مثال

* $(2 \times \sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ * $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{4^2}{3^2} = \dfrac{16}{9}$

اكتســاب معــارف

كيف نستعمل العمليات على قوى الأعداد العادية ؟

مثال دون استعمال آلة حاسبة، احسب $A = \dfrac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times 15^2}$.

الحلّ: ① وجود الأساسين 3 و5 يجعلنا نفكر في كتابة $15 = 3 \times 5$:

$$A = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^7}{2^3 \times (3 \times 5)^2} = \frac{2^8 \times \cancel{3^2} \times 5^7}{2^3 \times \cancel{3^2} \times 5^2}$$

② نستعمل الخاصة $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:

$$A = \frac{2^8 \times \cancel{3^2} \times 5^7}{2^3 \times \cancel{3^2} \times 5^2} = 2^{8-3} \times 5^{7-2} = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 = 100\ 000$$

تحقّق من فهمك

① اكتب كلّاً من الأعداد الآتية بالصيغة العشرية.

❶ 10^3 ❷ 10^{-1} ❸ 10^{-4}

❹ 5^{-2} ❺ $(-3)^2$ ❻ 2^{-1}

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة 10.

❶ $100\ 000$ ❷ 0.01 ❸ 0.00001

تدرّب

① انسخ وأكمل.

❶ $2^2 \times 2^5 = 2^{\cdots}$ ❷ $6^3 \times 6^{-4} = 6^{\cdots}$ ❸ $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^{\cdots}$ ❹ $\dfrac{10^7}{10^{-1}} = 10^{\cdots}$

② انسخ وأكمل.

❶ $(3^4)^5 = 3^{\cdots}$ ❷ $(2^{-3})^2 = 2^{\cdots}$

❸ $(6^{-3})^{-1} = 6^{\cdots}$ ❹ $(-3y)^2 = \cdots \times y^{\cdots}$

③ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة قوة عدد واحد.

❶ $5^3 \times 2^3$ ❷ $4^2 \times 2^5$ ❸ $\dfrac{2^3}{5^3}$

❹ $\dfrac{10^7}{20^7}$ ❺ $\dfrac{25^3}{5^3}$ ❻ $\dfrac{2^7}{8^7}$

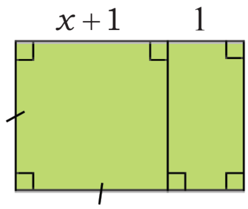
④ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بصيغة كسر عادي.

❶ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ ❷ $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$ ❸ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

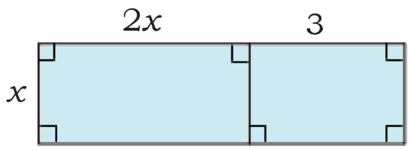
2 النّشر والتحليل

نشاط « استعمال المساحات في النشر»

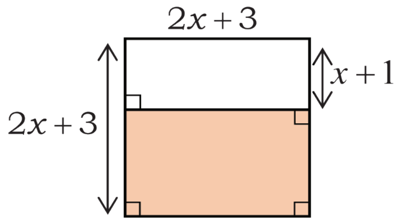
يرمز x إلى عدد موجب. في كلٍّ من الحالات الثلاث الآتية:



* $C=(x+1)^2+x+1$



* $A=2x^2+3x$



* $B=(2x+3)^2-(2x+3)(x+1)$

1. في كل حالة، تحقق من أنَّ المقدار المعطى بدلالة x ، يساوي مساحة المستطيل الملون.
2. استعمل الشكل لتتمكن من كتابة المقدار بصيغة جداء مضروبين.
3. حلِّل المقدار $E=(y+1)(y+2)+5(y+2)$ إلى جداء مضروبين.

تعلّم

خاصة

ترمز k و a و b و c إلى أعداد عادية.

1. قاعدة التوزيع: * $k(a+b)=ka+kb$ * $k(a-b)=ka-kb$
2. جداء ذي حدين بمثله: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

مثال

$$A=-2x(3x+2)=-2x\times 3x+(-2x)\times 2=-2\times 3\times x\times x-2\times 2\times x=-6x^2-4x$$

$$B=3x(x-2)=3x\times x+3x\times(-2)=3\times x\times x+3\times(-2)\times x=3x^2-6x$$

$$C=(x+1)(x+2)=x\times x+x\times 2+1\times x+1\times 2=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$$

$$D=(2x-3)(4x-1)=2x\times 4x+2x\times(-1)+(-3)\times 4x+(-3)\times(-1)$$
$$=8x^2-2x-12x+3=8x^2-14x+3$$

$$E=(x-3)(2x+1)=x\times 2x+x\times 1+(-3)\times 2x+(-3)\times(1)$$
$$=2x^2+x-6x-3=2x^2-5x-3$$

خاصة

لتحليل مجموع حدود إلى جداء، يمكن استعمال خاصة التوزيع:

* $k(x+y)=kx+ky$ * $k(x-y)=kx-ky$

نقول إنَّ k هو عاملٌ مشترك بين الحدين ky و kx.

مثال $A=x^2-3x=x\times x-3\times x=x(x-3)$

مثال $B=4x^2-x=x\times 4x-x\times 1=x(4x-1)$

مثال $C=(2x+1)^2+(2x+1)(x-2)$

$$C=(2x+1)(2x+1)+(2x+1)(x-2)=(2x+1)[(2x+1)+(x-2)]$$
$$=(2x+1)(2x+1+x-2)=(2x+1)(3x-1)$$

تحقّق من فهمك

① انشر كلاً من المقادير الآتية:

❶ $2(x-5)$ ❷ $-4(3y-2)$

② حلل العبارة:

❶ $A=2x^2-3x$ ❷ $B=(x+3)^2+6(x+3)$

تدرّب

① انشر ثم اختزل كلاً من المقادير الآتية:

❶ $A=(x+2)(x+3)$ ❷ $B=(x-3)(x-5)$

❸ $C=(y-3)(2y+1)$ ❹ $D=(x+2y)(2x-y)$

② لدينا $E=(2x-3)(x+2)-5(2x-3)$. ❶ انشر ثم اختزل E. ❷ حلّل E.

③ في كل مما يأتي عيّن عاملاً مشتركاً، ثم حلّل واختبر المساواة التي حصلت عليها.

❶ $A=5x^2-3x$

❷ $B=(y-1)^2-2(y-1)$

❸ $C=(2z+1)(3z-4)+5(2z+1)$

2

③ مطابقات شهيرة

نشاط « استعمال المساحات للحصول على المطابقات الشهيرة»

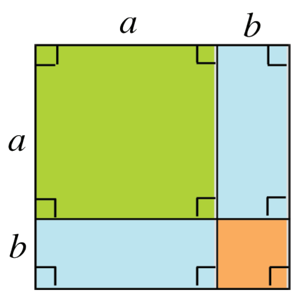
1. تمهيد

	$2a+6$	$2(a+3)$
$a=1$		
$a=-2$		

انسخ ثم أكمل الجدول السابق. تأمّل نواتج حساباتك. ماذا تلاحظ؟

عند تحقق المساواة من أجل كل قيمة للمجهول عندئذٍ نسمي هذه المساواة "مطابقة".

2. مربع مجموع



① إخراج هندسي: a و b يرمزان إلى طولين، وهما إذاً موجبان تماماً.

- استفد من الشكل المرسوم جانباً لحساب مساحة المربع الذي طول حرفه $a+b$ بطريقتين مختلفتين.
- انسخ ثم أكمل: $(a+b)^2 = \ldots + 2\ldots + \ldots$

② الإثبات: احسب $(a+b)^2$ بنشر $(a+b)(a+b)$، ثم اختزل الناتج.

قارن بين هذا الناتج وناتج ①.

③ تطبيق x و y و z أعداد عادية. انشر ثم اختزل كلاً من: • $(x+5)^2$ • $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2$

3. مربع فرق

① نشر $(a-b)^2$ اكتب $a-b=a+(-b)$ ثم استعمل ما توصلت إليه في **2.**

انسخ ثم أكمل: $(a-b)^2 = \cdots\cdots - 2\cdots\cdots + \cdots\cdots$

② تطبيق x و y و z أعداد عادية. انشر ثم اختزل كلاً من:

* $(x-6)^2$ * $\left(2-\frac{3}{2}y\right)^2$ * $(3z-2x)^2$

4. فرق مربعين

① انسخ وأكمل: $(a+b)(a-b) = \ldots + \ldots - \ldots - \ldots = \ldots - \ldots$

② تطبيق انشر ثم اختزل كلاً من: * $(x-6)(x+6)$ * $\left(2-\frac{3}{2}y\right)\left(2+\frac{3}{2}y\right)$

تعلّم

يرمز هنا a و b إلى عددين عاديين.

خاصة

* $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

الطرف الأيسر مربع مجموع حدين والطرف الأيمن مربع الأول زائداً ضعفي الأول بالثاني زائداً مربع الثاني.

* $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

الطرف الأيسر مربع فرق حدين والطرف الأيمن مربع الأول ناقصاً ضعفي الأول بالثاني زائداً مربع الثاني.

* $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

الطرف الأيسر جداء ضرب مجموع حدين بفرقهما والطرف الأيمن فرق مربعي الحدين.

مثال

- $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$
- $(y-3z)^2 = y^2 - 2\times y\times 3z + (3z)^2 = y^2 - 6yz + 9z^2$
- $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

تحليل مع مطابقة شهيرة

لتحليل مجموع حدود إلى جداء، يمكن أيضاً استعمال المطابقات الشهيرة على النحو الآتي:

* $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ * $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ * $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

مثال

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 = (x+3)^2$
- $9y^2 - 6y + 1 = (3y)^2 - 2\times 3y\times 1 + 1^2 = (3y-1)^2$
- $16x^2 - 9 = (4x)^2 - (3)^2 = (4x+3)(4x-3)$

اكتساب معارف

كيف نستعمل المطابقات في النشر؟

مثال

انشر ثم اختزل كلاً من

$A = (3x-5)^2$ و $B = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - (x-1)(x-3)$

الحلّ

- $A=(3x-5)^2$

① نستعمل المطابقة $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ حيث $(a=3x)$ و $(b=5$ وليس $-5)$

$A=(3x)^2-2(3x)\times 5+5^2$

② نضع $(3x)^2=3^2\times x^2=9x^2$ و $2(3x)\times 5=2\times 3\times 5\times x=30x$ و $5^2=25$

إذن $A=9x^2-30x+25$

- $B=(\frac{1}{2}x-1)(\frac{1}{2}x+1)-(x-1)(x-3)$

① لنشر $(\frac{1}{2}x-1)(\frac{1}{2}x+1)$، نستعمل $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ حيث $a=\frac{1}{2}x$ و $b=1$. ولنشر $(x-1)(x-3)$، نكتب $(x-1)(x-3)=x\times x+x(-3)+(-1)\times x+(-1)(-3)$

② نضع $(\frac{1}{2}x)^2=\frac{1}{4}x^2$ و $1^2=1$ و $x\times x=x^2$ و $x\times(-3)=-3x$ و $(-1)\times x=-x$ و $(-1)(-3)=+3$، فنحصل على $B=\frac{1}{4}x^2-1-(x^2-3x-x+3)$

③ نعلم أنَّ $-(x^2-3x-x+3)=-x^2+3x+x-3$، إذن $B=\frac{1}{4}x^2-1-x^2+3x+x-3$

④ نجمع الحدود المتشابهة، فنحصل على: $B=-\frac{3}{4}x^2+4x-4$

كيف نستعمل المطابقات في التحليل؟

مثال حلِّل كلاً من $A=2y^2(5x-1)-2(5x-1)$ و $B=(y+1)^2-100$

الحل

- $A=2y^2(5x-1)-2(5x-1)$

① نلاحظ أنَّ $2(5x-1)$ عامل مشترك بين حدي المقدار. نستعمل إذن خاصة التوزيع:

$ak-bk=(a-b)k$ حيث $a=y^2$ و $b=1$ و $k=2(5x-1)$

$A=2(5x-1)y^2-2(5x-1)=2(5x-1)[y^2-1]$

② نستعمل $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ فنحصل على $A=2(5x-1)(y+1)(y-1)$.

- $B=(y+1)^2-100$

① نكتب $100=10^2$: $B=(y+1)^2-10^2$

② نستعمل المطابقة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ حيث $a=(y+1)$ و $b=10$.

$B=[(y+1)-10][(y+1)+10]$

③ نكتب $(y+1)-10=y+1-10=y-9$ و $(y+1)+10=y+1+10=y+11$

فنحصل على $B=(y-9)(y+11)$.

كيف ننشر مع جذور تربيعية ؟

مثال ليكن $E=(3-4\sqrt{5})(3+4\sqrt{5})$ أثبت أنَّ E عدد صحيح.

الحلّ

① نستعمل المطابقة $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ حيث $a=3$ و $b=4\sqrt{5}$.

$$E=(3)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2$$

② لحساب $\left(4\sqrt{5}\right)^2$، نستخدم الخاصة $(c\,d)^2=c^2\times d^2$ حيث $c=4$ و $d=\sqrt{5}$.

$$E=9-(4)^2\times\left(\sqrt{5}\right)^2$$

③ نعلم أنَّ $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$، إذن $E=9-16\times 5=9-80=-71$

تحقّق من فهمك

① انشر مستفيداً من المطابقات الشهيرة.

❶ $A=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$ ❷ $B=\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2$ ❸ $C=\left(z+\dfrac{1}{5}\right)\left(z-\dfrac{1}{5}\right)$

② انشر ثم اختزل.

❶ $A=(2-3x)^2$ ❷ $B=\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)\left(\dfrac{3}{2}+2x\right)-\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

تدرب

① انشر مستفيداً من المطابقة $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

❶ $A=(x+2)(x-2)$ ❷ $B=(y-0.1)(y+0.1)$

② انشر ثم اختزل:

❶ $A=(4x-1)^2+(x+2)^2$ ❷ $B=(5y+4)^2+(5y+4)(5y-4)$

❸ $C=(7z-1)^2-(7z+1)^2$ ❹ $D=(5t-4)(t+2)-(t+2)^2$

③ انسخ، ثم أكمل لتصبح كل عبارة مطابقة (أيّ محققة عند جميع قيم x)

❶ $(x+\cdots\cdots)^2=\cdots\cdots+6x+\cdots\cdots$ ❷ $(\cdots\cdots-\cdots\cdots)^2=4x^2-\cdots\cdots+25$

❸ $(7x+\cdots\cdots)(\cdots\cdots-\cdots\cdots)=\cdots\cdots-64$

④ دون استعمال آلة حاسبة، احسب بأسهل ما يمكن:

❶ 98^2 ❷ 98×102 ❸ 62×58 ❹ 501^2

⑤ حلِّل كلاً من العبارات الآتية:

❶ $A=(x-2)^2+3(x-2)$ ❷ $B=5^2-16x^2$

❸ $C=x^2+6x+9$ ❹ $D=9x^2-6x+1$

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) كل $1\ km$ يساوي $100\ 000\ cm$، فكل $1\ cm$ يساوي

① $10^5\ km$ ② $10^{-5}\ km$ ③ $10^3\ km$

(2) $5^2 \times 5^4$ يساوي

① 25^8 ② 5^8 ③ 5^6

(3) مِثلا 2^5 يساوي

① 4^5 ② 2^6 ③ 2^{10}

(4) $\left(5^2\right)^3$ يساوي

① 5^5 ② 10^3 ③ 5^6

(5) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$ يساوي

① $\frac{2}{3}x^2$ ② $\frac{4}{9}x^2$ ③ $\frac{4}{6}x^2$

(6) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ هو عدد

① صحيح ② عادي غير صحيح ③ غير عادي

(7) $(4x+5)^2$ يساوي

① $16x^2+40x+25$ ② $16x^2+20x+25$ ③ $4x^2+40x+25$

(8) $(5-3t)(5+3t)$ يساوي

① $15-9t^2$ ② $25-9t^2$ ③ $25+9t^2$

(9) $9y^2-30y+25$ يساوي

① $(3y+5)^2$ ② $(16y-5)^2$ ③ $(3y-5)^2$

(10) $\frac{9}{25}-\frac{1}{4}x^2$ يساوي

① $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}x\right)^2$ ② $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}x\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}x\right)$

2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) $\frac{2^3}{4^3}$ يساوي ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2^3}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(2) $3x^2-6x$ يُكتب ① $3x(x-2)$ ② $x(3x-2)$ ③ $3(x^2-2x)$

(3) $(2x-1)(x+1)-(2x-1)(x-1)$ يساوي

① $(2x-1)[(x+1)-(x-1)]$ ② $(2x-1)^2-(x-1)^2$ ③ $2(2x-1)$

(4) يُكتب $(x-1)^2+2x$ بالشكل ① $(x+1)^2$ ② x^2+1 ③ $(x+1)^2-2x$

3 أيُّ العبارات التالية صحيح وأيها خطأ؟ علّل اجابتك.

(1) نصف 4^5 يساوي 2^5.

(2) $2^7-2^3=2^4$.

(3) مربع أي عدد هو عدد عادي.

(4) $z^2+10z+25$ هو مربع عدد، أياً يكن العدد z.

(5) $(x+3)$ هو أحد مضاريب المقدار $(x+3)^2-5x-15$ التي تنتج عند تحليله.

4 يرمز x إلى عدد عادي في العبارة $E=(x-1)^2-5x$. احسب E في كلٍّ من الحالات الآتية:

❶ $x=5$ ❷ $x=0$ ❸ $x=-3$

5 اختزل كلاً من العبارات الآتية

① $B=1+4y-2-y$ ② $D=x-1-(2x-4)$

6 اكتب كلاً من الأعداد بصيغة قوة عدد واحد.

① $A=3^4\times3^{-2}\times3^5$ ② $B=\frac{5\times(5^{-2})^{-3}}{5^9}$ ③ $C=\frac{3^4\times3^5}{3^{-2}}$

7 أكتب المقدار $P=\frac{3^7\times4^8\times5^4}{2^5\times5^{-7}\times9^3}$ على النحو الآتي $2^a\times3^b\times5^c$

8 بيّن إن كان العدد المعطى صحيحاً أم غير صحيح:

① $A=\frac{16\times10^{-1}\times2}{(10^3)^2\times10^{-8}\times80}$ ② $B=\frac{-2\times10^{-3}\times25\times(10^2)^2}{50\times10^5\times(-0.1)\times10^{-3}}$

9 انشر واختزل كلاً من:

① $A=(7t+3)(t-4)-(t-2)(t+6)$ ② $B=2x(8x-1)-(4x-5)(4x-1)$

10 حلِّل كلاً من

① $A=(5x+1)^2-(x-3)(5x+1)$ ② $B=(2t+3)^2-36$

11 انسخ، ثم أكمل لتصبح كل عبارة مطابقة (محققة عند جميع قيم x)

① $49x^2-\cdots\cdots=(\cdots\cdots+3)(\cdots\cdots-3)$ ② $\cdots\cdots+10x+\cdots\cdots=(x+\cdots\cdots)^2$

③ $x^2-\cdots\cdots+64=(\cdots\cdots-\cdots\cdots)^2$ ④ $\cdots\cdots-14x+49=(\cdots\cdots-\cdots\cdots)^2$

12 لدينا $N=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$ أثبت أنَّ N عدد صحيح.

13 اكتب العدد $A=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ بالصيغة $a+b\sqrt{c}$ مع c عدد موجب.

لإحراز تقدّم

14 حلِّلْ باستعمال مطابقات مناسبة.

① $A=49-36x^2$ ② $C=x^2-2x+1$ ③ $I=(t+1)^2-8(t+1)+16$

④ $E=(2x-1)^2-(3x+2)^2$ ⑤ $F=9+30z+25z^2$ ⑥ $G=25z^2-30z+9$

15 التحقق من صحة النشر

نشرت رغد العبارة $2x(3x-5)-5(2x-1)$. هذه إجابتها:

$$2x(3x-5)-5(2x-1)=6x^2-20x-5$$

1. اختبر هذه المساواة عند $x=0$. ماذا تستنتج؟
2. هذه هي العمليات التي أجرتها رغد:

$$\begin{aligned}2x(3x-5)-5(2x-1)&=2x\times 3x-2x\times 5-5\times 2x-5\times 1\\&=6x^2-10x-10x-5\\&=6x^2-20x-5\end{aligned}$$

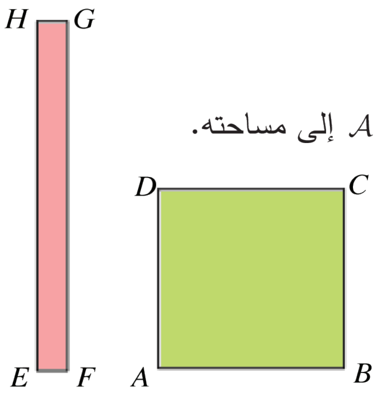
أين الخطأ في حل رغد؟ انشر العبارة بشكل صحيح.

16 الطريقة الأنسب

حسب فريد $(3+5)^2$ على النحو الآتي: $(3+5)^2=3^2+2\times3\times5+5^2=9+30+25=64$

1. هل أصاب فريد أم أخفق في الحساب؟
2. هل لديك طريقة أسرع من الطريقة التي اتبعها فريد ؟ استعملها إذن لحساب $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^2$.

17 مساحتان متساويتان



$ABCD$ مربع طول ضلعه $3+\sqrt{3}$. لنرمز $\mathcal{A}$ إلى مساحته.

$EFGH$ مستطيل بعداه: $EH=\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ و $EF=\sqrt{2}$. ونرمز $\mathcal{A}'$ إلى مساحته.

1. احسب $\mathcal{A}$ واختزل الناتج.
2. احسب $\mathcal{A}'$. ثم تحقق من أنَّ $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$.

18 مع الجذور التربيعية

لدينا $L=(3x-1)(2x+5)-(3x-1)^2$.

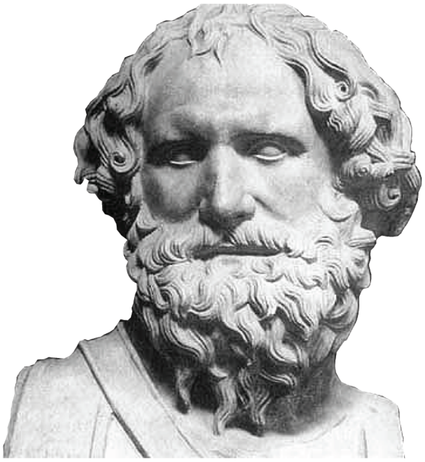
1. انشر ثم اختزل L .
2. احسب قيمة L في حالة $x=1+\sqrt{2}$.

3

الوحدة الثالثة
معادلات ومتراجحات

1. معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد
2. معادلات – خاصة الجداء الصفري
3. متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

كيف وجدها أرخميدس ؟



كان يعتقد الحاكم أنّ الصانع قد تلاعب بكميّة الذهب عندما صنع التاج. من المفترض أن يكون التاج مصنوعاً من الذهب الخالص وأن تساوي كتلته 1kg. شكّ الحاكم بنزاهة الصانع وتوقّع أن يكون الصانع قد غشّ الذهب بالفضّة فصنع تاجاً مغشوشاً كتلته أيضاً 1kg.

طلب الحاكم من أرخميدس أن يبتكر طريقة لكشف الحقيقة. كان أرخميدس يدرك أنّ معرفة حجم التاج بدقّة قد تفيده في اكتشاف الحقيقة، لأنّ كتلة كلّ درهم ذهبي تساوي 19.3g وحجمه $1cm^3$، وعليه يستطيع حساب حجم التاج. فإذا كان التاجُ من الذهب الخالص تطابقت النتيجة مع الحجم الفعلي للتاج، أمّا إذا اختلفتْ القيمة المحسوبة للحجم عن الحجم الفعلي للتاج يكون أرخميدس قد اكتشف الغشّ في صناعة التاج.

ظلّ أرخميدس يفكّر في طريقة لمعرفة الحجم الفعلي للتاج بدقّة، وبينما كان يدخل في حوض الاستحمام لاحظ أن جسمه يزيح من الماء بقدر الحجم الذي يدخل في الماء، فاستنتج أنّ غمر التاج في الماء وحساب حجم الماء الذي يزيحه التاج هو الأسلوب المناسب لحساب الحجم الفعلي للتاج، فنهض من حوض الاستحمام وراح يركض في شوارع سيراكوزا صائحاً "وجدتها وجدتها... ευρηκα".

أجرى أرخميدس قياسه فوجد أنّ حجم التاج يساوي $62.7cm^3$، فهل كان التاج مغشوشاً؟ وإذا علمتَ أنّ كتلة كل درهم فضة تساوي 10.5g وحجمه $1cm^3$، فكم كانت النسبة المئوية للذهب في التاج المغشوش؟

معادلات ومتراجحات

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. صيغة الضرب

أي المقادير الآتية مكتوبٌ بصيغة جداء ضرب مقدارين؟

① $4(x-3)+5$ ② $3y-2$ ③ $(z-1)(3z+7)$

2. معادلة

أي الكتابات الآتية تمثّل معادلة بمجهول؟

① $x^2-x(x-3)$ ② $5-3=\frac{7}{2}-1.5$ ③ $2(y-1)=3y+5$

3. جذر معادلة

أحد جذور المعادلة $x^2-3x=2(x-3)$ هو:

① 1 ② 3 ③ -1

المقصود بعبارة (حلّ معادلة) هو: عملية إيجاد جميع جذور المعادلة.

4. تعبير عن نصّ بمعادلة

«أوجد عدداً، مجموع ثلاثة أمثاله مع العدد 8 يساوي نصف مربعه»

إذا رمزنا إلى هذا العدد بالرمز x، أمكن التعبير عن هذه المسألة بالصيغة:

① $3(x+8)=\frac{1}{2}x^2$ ② $3x+8=\frac{1}{2}x^2$ ③ $\frac{1}{2}(3x+8)=x^2$

5. إضافة عدد إلى طرفي متراجحة

إذا رمز x إلى عدد عادي يحقّق $x-3>2$، استنتجنا أنَّ:

① $x<-5$ ② $x>5$ ③ $x<1$

6. قسمة طرفي متراجحة على عدد

إذا رمز x إلى عدد عادي يحقق $-3x<12$، استنتجنا أنَّ:

① $x<15$ ② $x<-4$ ③ $x>-4$

7. خطوتان للوصول إلى حلّ متراجحة

المتراجحة $5x-2<0$ صحيحة في حالة:

① $x>0.4$ ② $x<\frac{5}{2}$ ③ $x<0.4$

3

1 معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد

نشاط « خطوات حل معادلة »

مصطلحات

- **حلُّ معادلة** هو إيجاد قيمة (أو قيم) المجهول التي تحقّق المعادلة أي تجعلها صحيحة.
- تسمى كل قيمة للمجهول تحقّق المعادلة **حلاً** لها أو **جذراً** لها.
- نقول إنَّ معادلتين **متكافئتان** إذا كان لهما الحلول نفسها.

قاعدة. لحلِّ معادلة من النمط $hx + m = cx + d$ ① $(h \neq c)$، نتبع الخطوات الآتية:

(1) نجمع مقداراً إلى كلٍ من طرفي المعادلة أو نطرح مقداراً من كلٍ من طرفيها حتى نحصل على «معادلة بسيطة» من النمط $ax = b$ ②.

(2) نقسم كلّاً من طرفي المعادلة ② على a فنحصل على قيمة المجهول x وهي $x = \frac{b}{a}$.

1. تطبيق مباشر: حلَّ غيث المعادلة $5x - 1 = 7x + 5$ على النحو الآتي:

① $5x - 1 - 7x = 5$

② $-2x - 1 = 5$

③ $-2x - 1 + 1 = 5 + 1$

③ $-2x = 6$

⑤ $x = -3$

- حلُّ غيث صحيح ولكن لم يشرح لنا خطوات الانتقال الخمس التي أنجزها.
- اشرح خطوات الحل بلغة سليمة.

2. أقراص *DVD*

1. تمتلك مايا مبلغاً من المال. اشترت أربعة أقراص *DVD* وبقي معها 400 ليرة سورية. نرمز إلى سعر القرص الواحد بالرمز x. عبّر، بدلالة x، عن المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

2. تأكدت مايا من أنّها كانت تستطيع أن تشتري بالمبلغ الذي كانت تمتلكه قبل الشراء ستة أقراص إذا نقص سعر القرص 100 ليرة. عبّر، بدلالة x، عن المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء بعبارة أخرى.

3. اكتب معادلة يحقّقها العدد x.

4. حلّ هذه المعادلة. ثم استنتج سعر القرص، وبعدئذ المبلغ الذي كانت تمتلكه مايا قبل الشراء.

تعلّم

تعريف

المعادلة من الدرجة الأولى بالمجهول x ، هي كل معادلة تؤول إلى الشكل $a\,x+b=0$ (مع $a \neq 0$)

خواص

(1) إذا جمعنا المقدار نفسه إلى كلٍّ من طرفي المعادلة أو طرحنا المقدار نفسه من كلٍّ من طرفيها حصلنا على معادلة مكافئة للمعادلة المعطاة.

(2) إذا ضربنا كلّاً من طرفي المعادلة بعدد غير معدوم أو قسمنا كلّاً من طرفيها على عدد غير معدوم، حصلنا على معادلة مكافئة للمعادلة المعطاة.

حــــل معادلة

لحل المعادلة من الشكل $h\,x+m=c\,x+d$

(1) نردُّ، باستعمال الخواص، المعادلة إلى معادلة مكافئة من الصيغة $ax=b$ $(a \neq 0)$

(2) نقسم طرفي المعادلة على a فنجد $x=\dfrac{b}{a}$ ، وهو حل المعادلة (أو جذرها).

مثال حل المعادلة $5\,x-4=3\,x+2$

① نطرح $3\,x$ من كلٍّ من طرفي المعادلة فنحصل على $2\,x-4=2$.

② نجمع العدد 4 إلى كلٍّ من طرفي المعادلة السابقة، فنحصل على $2\,x=6$.

② نقسم كلّاً من طرفي المعادلة الأخيرة على العدد 2 فنحصل على $x=3$.

نتحقق من أنَّ $x=3$ يحقق المعادلة (هذه الخطوة ليست جزءاً من الحل، لكنها مفيدة لدرء أي خطأ حسابي محتمل)

التحقّق

$$5x-4=5(3)-4=15-4=11$$
$$3x+2=3(3)+2=\ \ 9+2=11$$

اكتســاب معـــارف

كيف نعبر عن مسألة بمعادلة؟

في أحد المجالس عددٌ من الأشخاص، ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و 30 سنة، وثُلثهم تنقص أعمارهم عن 20 سنة، ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن 30 سنة. ما عدد الأشخاص في هذا المجلس؟

الحلّ

① ترميز المجهول. نرمز إلى عدد الأشخاص في المجلس بالرمز x ، فيكون: ربع عددهم $\frac{x}{4}$ وثلث عددهم $\frac{x}{3}$ وعددهم الكلي $20 + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}$.

② تشكيل المعادلة. من جهة أخرى عدد الأشخاص يساوي x ، إذن

$$x = 20 + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}$$

$$x = 20 + \frac{3x}{12} + \frac{4x}{12}$$

$$x = 20 + \frac{7x}{12}$$

③ حلّ المعادلة

نطرح $\frac{7x}{12}$ من كلٍ من طرفي المعادلة، فنحصل على

$$x - \frac{7x}{12} = 20$$

$$\frac{12x}{12} - \frac{7x}{12} = 20$$

$$\frac{5x}{12} = 20$$

نضرب طرفي المعادلة بالعدد $\frac{12}{5}$ ، فنجد $x = 20 \times \frac{12}{5} = 48$. فعدد الأشخاص في المجلس يساوي 48 شخصاً.

لاحظ أنّه يمكننا كتابة الكسر $\frac{ax}{b}$ بالشكل $\frac{a}{b}x$.

تحقّق من فهمك

① أيُّ المعادلات الآتية حلُّها -2 ؟

① $3x + 1 = 2x - 3$ ② $5y + 2 = 3y - 2$ ③ $\frac{z}{2} - 3 = z - 2$

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

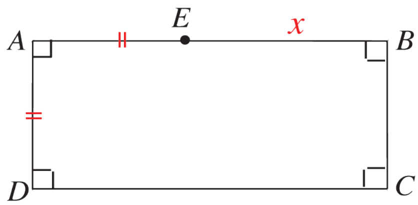
① $5y - 4 = 3y + 2$ ② $\frac{z}{3} = \frac{1}{2}$ ③ $\frac{z}{3} + 4 = \frac{z}{4} - 1$

تدرّب

① حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\frac{z}{5} - 2 = z + 2$ ② $4x + \frac{1}{2} = 2x - \frac{1}{3}$ ③ $\frac{y}{2} - \frac{3}{2} = \frac{y}{3} - \frac{1}{2}$

② $ABCD$ مستطيل، و E نقطة من $[AB]$ تحقّق $EA = AD = 3\text{ cm}$ و $EB = x$ (بالسنتيمترات)



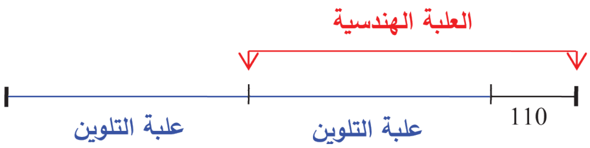
1. احسب بدلالة x محيط المستطيل.

2. استعمل معادلة لحساب قيمة x التي تجعل محيط المستطيل مساوياً 20 cm.

③ اشترت سلمى علبة أقلام تلوين وعلبة أدوات هندسيّة بمبلغ 710 ليرة سورية.

العلبة الهندسيّة أغلى من علبة التلوين بمبلغ 110 ليرة سورية.

يمكن تمثيل الحالة بالمخطط المرافق.



1. أيّ الأعداد الآتية يدل على سعر علبة التلوين:

❶ $710 - 110$ ❷ $710 \div 2 - 110$ ❸ $(710 - 110) \div 2$

2. ما سعر العلبة الهندسية؟

2 معادلات – خاصة الجداء الصفري

نشاط « نحو حل معادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d)=0$ »

.1 الجداء الصفري

1. دلّ على كلّ مساواة صحيحة مما يأتي:

- $5\times 0=5$
- $5\times 0=0$
- $5\times(-5)=0$
- $5\times\frac{1}{5}=0$

2. لنتأمل الجداء $5\times z$. ما قيمة z التي تعدم هذا الجداء (تجعله مساويا الصفر)؟

3. أكدت ريم بأنها أضمرت عدداً y يعدم المقدار $5(y-2)$. ما العدد الذي أضمرته ريم؟

4. انسخ وأكمل، علماً بأنَّ a و b يرمزان إلى عددين عاديين.

① في حالة $a=0$ أو $b=0$، يكون $a\times b=\cdots\cdots$.

② إذا كان $a\times b=0$، كان .... أو كان ....

.2 المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$

طريقة الحلّ

- إذا كان جداء عدة أعداد معدوماً، كان واحد على الأقل منها معدوماً (خاصَّةُ الجداءِ الصفريّ).
- بناءً على الخاصة السابقة، حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي قيم x التي تجعل $ax+b=0$ أو $cx+d=0$.

1. حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $(x-2)(x+3)=0$

② $(2x+5)(3x-1)=0$

③ $(y-4)^2=0$

④ $3(x+5)(2x-3)=0$

2. صحِّح الأخطاء في الحلول الآتية:

① حلول المعادلة $3(x-5)=0$ هي قيم x التي تحقق $3x=0$ أو $x-5=0$. إذن $x=\frac{1}{3}$ أو $x=5$.

② حلول المعادلة $(x+3)+(x-5)=0$ هي قيم x التي تحقق $x+3=0$ أو $x-5=0$ إذن $x=-3$ أو $x=5$.

تعلّم

خاصة الجداء الصفري

1. إذا كان أحدُ مضاريبِ جداءٍ معدوماً، كان الجداء معدوماً. بمعنى:

إذا كان $a = 0$ أو $b = 0$، كان $a \times b = 0$.

2. إذا كان جداء عدة مضاريب معدوماً، كان واحد على الأقل من المضاريب معدوماً. بمعنى:

إذا كان $a \times b = 0$، كان $a = 0$ أو $b = 0$.

3. يرمز a و b و c و d إلى أعداد حقيقية.

حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي قيم x التي تحقق: $ax+b=0$ أو $cx+d=0$

مثال حلّ المعادلة $(2x-4)(3x+2)=0$

الحل

حلول المعادلة $(2x-4)(3x+2)=0$ هي قيم x التي تحقق:

$$2x-4=0 \qquad \text{أو} \qquad 3x+2=0$$
$$2x=4 \qquad\qquad 3x=-2$$
$$x=\frac{4}{2}=2 \qquad\qquad x=-\frac{2}{3}$$

وبهذا يكون العددان 2 و $-\frac{2}{3}$ جذري المعادلة $(2x-4)(3x+2)=0$.

حل المعادلة $x^2 = a$

- في حالة عدد موجب تماماً a، يكون $+\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هما جذرا المعادلة $x^2 = a$.
- في حالة $a = 0$: للمعادلة $x^2 = 0$ حل وحيد هو $x = 0$.
- في حالة $a < 0$، لا توجد قيم للمجهول x تجعل $x^2 = a$. نقول إنَّ المعادلة $x^2 = a$، في هذه الحالة الأخيرة، غير قابلة للحل (مستحيلة الحل).

مثال

- قيم x التي تحقق $x^2 = 169$ هي $x = \sqrt{169}$ و $x = -\sqrt{169}$، أي $x = 13$ و $x = -13$.
- قيم x التي تحقق $x^2 = 11$ هي $x = \sqrt{11}$ و $x = -\sqrt{11}$.

اكتساب معارف

كيف نحصل على عبارة مناسبة؟

مثال لدينا $E = 9-(2x-1)^2$

① انشر ثم اختزل E.

② حلِّل E.

③ احسب E عندما $x = \frac{1}{2}$.

④ حل المعادلة $E = 0$.

الحل

① • لنشر $(2x-1)^2$، نستعمل المطابقة $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ حيث $a = 2x$ و $b = 1$، ولا ننسى وضع منشور $(2x-1)^2$ ضمن قوسين لأنه مسبوق بإشارة ناقص.

$$E = 9-\left[(2x)^2-2\times 2x\times 1+1\right] = 9-\left(4x^2-4x+1\right)$$

• نحذف الأقواس مع تغيير إشارات الحدود التي بداخلها.

$$E = 9-4x^2+4x-1$$

• نجمع الحدود المتشابهة.

$$E = -4x^2+4x+8$$

② • نكتب

$$E = 3^2-(2x-1)^2$$

• نستعمل المطابقة $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ حيث $a = 3$ و $b = (2x-1)$، ولا ننسى الأقواس الضامّة.

$$E = \left[3-(2x-1)\right]\left[3+(2x-1)\right] = (3-2x+1)(3+2x-1) = (4-2x)(2+2x)$$

③ • نحسب قيمة $(2x-1)$ عند $x = \frac{1}{2}$: فنجد صفراً، ثم نحسب قيمة E :

$$E = 3^2-0^2 = 9-0 = 9$$

④ • نستعمل $E = (4-2x)(2+2x)$. عندها تُكتب المعادلة $E = 0$ بالشكل $(4-2x)(2+2x) = 0$

• نستعمل خاصة الجداء الصفري:

$$4-2x = 0 \qquad \text{أو} \qquad 2+2x = 0$$

$$-2x = -4 \qquad\qquad 2x = -2$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad\qquad x = \frac{-2}{2} = -1$$

تحقّق من فهمك

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $(x+6)(x-7)=0$ ② $\left(\frac{y}{2}+2\right)\left(3y-\frac{5}{3}\right)=0$

③ $y^2=5$ ④ $(\sqrt{12}-3y)(2y+\sqrt{8})=0$

تدرّبْ

① حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $3x(x-3)(3x+1)=0$ ② $5(x^2+1)(8x-1)=0$ ③ $(3x+1)(3x-1)^2=0$

② اكتب معادلة: ① حلولها -2 و 5 ② حلولها 0 و 0.5 ③ حلولها $\sqrt{3}$ و -3

③ فيما يأتي، أوجد جميع القيم التي يمكن أن يأخذها المجهول في كل حالة:

❶ $x^2+5=54$ ❷ $y^2-7=74$ ❸ $z^2+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

❹ $y^2+1=1$ ❺ $x^2=(2.07)^2$ ❻ $3z^2=\sqrt{9}$

④ حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $3(5+3x)-(x-3)=0$ ② $3(5+3x)(x-3)=0$ ③ $x+2(x-3)=0$

⑤ حلِّل الطرف الأيسر، ثم حل المعادلة:

① $x(x-2)+3(x-2)=0$ ② $(3x+5)^2-4x^2=0$

③ $4x^2-9x=0$ ④ $(3x+1)^2+(3x+1)(x-1)=0$

⑥ لدينا المقدار $E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$.

1. انشر واختزل E، ثم حلّله واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$.

2. حلّ المعادلة $E=0$.

⑦ لدينا المقدار $F=(2x-1)^2+(2x-1)(3x+5)$.

1. انشر واختزل F، ثم حلله واحسب قيمته عند $x=\frac{1}{2}$.

2. حلّ المعادلة $F=0$.

⑧ لدينا المقداران:

$A=(4x+5)(x-2)-x(x+4)$ و $B=(3x-10)(x+1)$

1. أثبت أنَّ $A=B$.

2. استنتج حلول المعادلة $A=0$.

3 متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

نشاط « تعرف رموز ومصطلحات في حل المتراجحات »

رموز

- $<$: أصغر تماماً، مثلاً $(5<7)$.
- $>$: أكبر تماماً، مثلاً $(5>2)$
- $\leq$: أصغر أو يساوي (يُقرأ أصغر) $(5\leq 5)$ و $(5\leq 8)$
- $\geq$: أكبر أو يساوي (يُقرأ أكبر) $(3\geq 3)$ و $(5\geq 1)$

مصطلحات

- المتراجحة تعبر عن مقارنة بين طرفين.
- قيم x التي تجعل المتراجحة صحيحة تسمى حلول هذه المتراجحة.
- نقول إنَّ متراجحتين متكافئتان إذا كان لهما الحلول نفسها.

1. قل إن كانت المتراجحة، في كلٍ مما يأتي، صحيحة أم خاطئة.

* $11+3\geq 8+7$ * $11-3\geq 1+7$ * $1-3\geq 6-7$

* $5-3\geq 8-7$ * $10-1\geq 2+7$ * $1-3\geq 6-9$

2. أي القيم الآتية تحقق المتراجحة $2x+1<x-5$؟

* $x=0$ * $x=-10$ * $x=5$

طريقة حلّ متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول

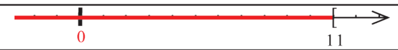
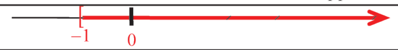
لحل متراجحة من النمط $hx+m<cx+d$ ① $(h\neq c)$، نتبع الخطوات التي اتبعناها في حل معادلة من النمط $hx+m=cx+d$، أي

(1) نجمع مقداراً إلى كلّ من طرفي المتراجحة أو نطرح مقداراً من كلٍ من طرفيها حتى نحصل على «متراجحة بسيطة» من النمط $ax<b$ ②، أو $b<ax$ ③ حيث $a>0$.

(2) • نقسم طرفي المتراجحة ② على a فنحصل على $x<\frac{b}{a}$.

• أو نقسم طرفي المتراجحة ③ على a فنجد $x>\frac{b}{a}$.

① انسخ وأكمل كما في السطر الأول:

المتراجحة	الخاصة المستعملة	حل المتراجحة	تمثيل الحل
$x-5<6$	نضيف 5 إلى الطرفين	$x<11$	
$x+3\geq 2$	....	$x\geq$	
$2x<-6$	....	x	....
$-3x>12$	....	x	....

② حل كلّاً من المتراجحتين الآتيتين، ومثّل الحلول على مستقيم الأعداد كما في الجدول السابق.

* $4-3x\geq 2$ * $4x+8<16-2x$

تعلّم

تعريف

- المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x، تعبر عن مقارنة بين طرفين قد تكون صحيحة أو غير صحيحة، ذلك حسب قيم x.
- كلُّ قيمة للمجهول x تجعل المقارنة بين الطرفين صحيحة تسمّى **حلاً للمتراجحة**.
- **حلُّ متراجحة** هي عملية إيجاد جميع قيم x التي تحققها (تجعل المقارنة صحيحة)

مثال لتكن المتراجحة $-2x>1$

- عند $x=3$: $-2x=-2\times 3=-6$ و $-6>1$، وهذه المقارنة غير صحيحة. إذن 3 **ليس حلاً** للمتراجحة $-2x>1$.
- عند $x=-1$: $-2x=-2\times(-1)=2$ و $2>1$، وهذه المقارنة صحيحة. إذن -1 **حلٌ** للمتراجحة $-2x>1$.

تعريف

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x، هي كل متراجحة من أحد الأنماط الآتية:

$$ax+b<cx+d \text{ ، } ax+b>cx+d \text{ ، } ax+b\leq cx+d \text{ ، } ax+b\geq cx+d$$

حيث a و b و c و d أعداد مع $a\neq c$.

خواص

(1) إذا جمعنا نفس العدد إلى طرفي متراجحة أو طرحنا نفس العدد من طرفيها نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

(2) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد موجب تماماً أو قسمنا طرفيها على عدد موجب تماماً، نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

(3) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد سالب تماماً أو قسمنا طرفيها على عدد سالب تماماً، يُعكس اتجاهها.

حــــلّ متراجحة

لحل المتراجحة $hx+m<cx+d$ (مع $h\neq c$)، ومثلها الأنماط الأخرى(التي تحوي $\leq,\geq,>$):

(1) باستعمال الخواص نرد المتراجحة إلى متراجحة مكافئة لها الصيغة $ax<b$ أو $ax>b$ (حيث $a>0$).

(2) نقسم طرفي المتراجحة على a (أو نضرب طرفي المتراجحة بمقلوب العدد a):

- فنحصل على $x<\dfrac{b}{a}$، في الحالة الأولى.
- أو نحصل على $x>\dfrac{b}{a}$، في الحالة الثانية.

مثال حلّ المتراجحة $x-4<3x+2$

الحل

① نجمع العدد 4 لكلٍّ من طرفي المتراجحة فنحصل على $x<3x+6$.

② نطرح $3x$ من كلٍ من طرفي المتراجحة $x<3x+6$، فنحصل على $-2x<6$.

③ نقسم كلاً من طرفي المتراجحة $-2x<6$ على -2 فنحصل على $x>-3$.

فحلول المتراجحة $x-4<3x+2$ هي جميع قيم x الأكبر تماماً من -3 .

مثال حلّ المتراجحة $4x+3\geq -x-2$

① نطرح العدد 3 من طرفي المتراجحة فنحصل على $4x\geq -x-5$.

② نجمع x لكلٍ من طرفي المتراجحة $4x\geq -x-5$، فنحصل على $5x\geq -5$.

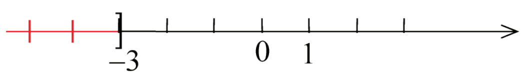
③ نقسم طرفي المتراجحة $5x\geq -5$ على 5، فنحصل على $x\geq -1$.

فحلول المتراجحة $4x+3\geq -x-2$ هي جميع قيم x الأكبر من أو تساوي -1.

تمثيل حلول المتراجحة على مستقيم الأعداد

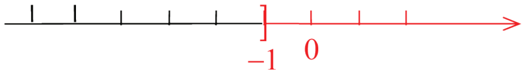
مثال الأعداد التي كلّ منها أكبر تماماً من -3:

حلول المتراجحة ممثلة بنقاط الجزء الملون باللون الأسود من مستقيم الأعداد (عدا -3)



مثال الأعداد التي كلٌّ منها أصغر من -1:

حلول المتراجحة ممثلة بنقاط الجزء الملون باللون الأسود من مستقيم الأعداد (بما فيها -1)



اكتســاب معــارف

كيف نعبّر عن مسألة بمتراجحة ؟

مثال

شراء محابر من المكتبة يكلف 1790 ليرة لكل محبرة. وشراؤها عن طريق موقع إنترنت يكلف 1650 ليرة لكل محبرة، مع إضافة أجرة النقل وهي 490 ليرة أياً كان عدد المحابر المشتراة.

بدءاً من أي عدد من المحابر يكون الشراء عن طريق موقع إنترنت أوفر من الشراء من المكتبة؟

الحل

① ترميز المجهول

نرمز إلى أقل عدد من المحابر ليكون الشراء عن طريق موقع إنترنت أوفر بالرمز x ، فيكون:

كلفة المحابر من المكتبة $1790 \times x$، وكلفتها عن طريق موقع الإنترنت $1650 \times x + 490$

② تشكيل متراجحة

نريد أن تكون الكلفة في حالة الإنترنت أقل من الكلفة في حالة المكتبة، أي: $1790x > 1650x + 490$.

③ حلّ المتراجحة

نطرح $1650x$ من كلٍ من طرفي المتراجحة، فنحصل على $140x > 490$. **ثمّ نقسم طرفي المعادلة على** 140، فنحصل على $x > \frac{49}{14}$ ، أي $x > 3.5$.

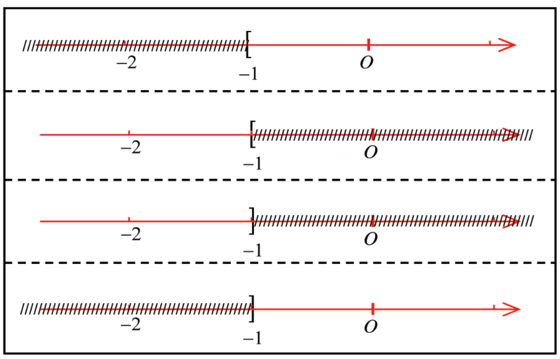
فأقل عدد من المحابر المشتراة **يجعل الشراء عبر موقع إنترنت** أوفر مما هو من المكتبة هو **4**.

تحقّق من فهمك

انسخ ثم اربط كل متراجحة من الحقل ① بحلها الممثل باللون الأحمر من الحقل ②.

$x > -1$
$x < -1$
$x \geq -1$
$x \leq -1$

①



②

تدرّب

① حلّ كلّاً من المتراجحات الآتية ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

❶ $3x+2>8$ ❷ $-2x+3\leq 5$ ❸ $\frac{x}{2}-1<\frac{1}{2}$

② لدينا المتراجحة $2x-5\leq 3$.

1. أي الأعداد : $-2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ 5$، حل لهذه المتراجحة وأيّها ليس حلاً لها؟

2. حلّ هذه المتراجحة.

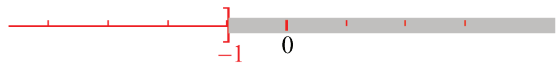
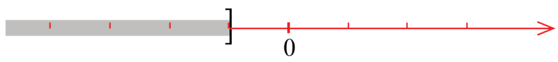
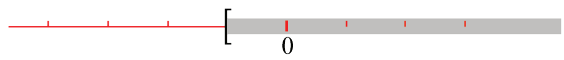
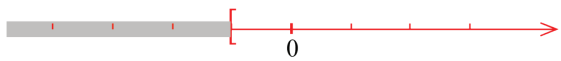
3. مثِّلْ حلولها على مستقيم الأعداد.

③ لدينا المتراجحة $2x-5\leq \frac{3}{2}-11x$

1. دون أن تحل المتراجحة، هل أحد العددين 0 و 1 أو كلاهما حل لها؟

2. حل هذه المتراجحة ومثِّلْ حلولها على مستقيم الأعداد.

④ انسخ ثم اربط كل متراجحة من الحقل الأيسر بحلها الممثل باللون الأحمر من الحقل الأيمن.

❶ $5x-1\leq 3(x-1)$	a 
❷ $4x-(2x-1)>3x+2$	b 
❸ $\frac{x+4}{3}\geq 1$	c 
❹ $2x-4<5x-1$	d 

⑤ حلّ كل متراجحة ومثِّل حلولها على مستقيم الأعداد.

① $3x-2>x+5$ ② $2x-\frac{1}{4}\leq 3x-\frac{1}{4}$

③ $3(y-1)-2(4y+1)\geq 0$ ④ $\frac{1}{4}(3z+1)<\frac{1}{6}(5z+1)$

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) حَلُّ المعادلة $3x-5=0$ هو

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{3}{5}$

(2) حلول المعادلة $(3x-5)(2x+10)=0$ هي

① -5 ② $\frac{5}{3}$ ③ -5 و $\frac{5}{3}$

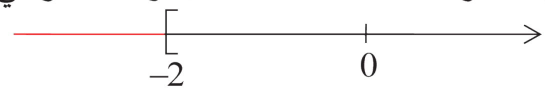
(3) حلول المعادلة $x^2=4$ هي

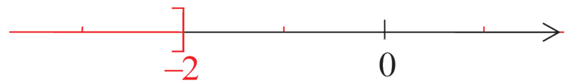
① -2 و 2 ② -4 و 4 ③ 1

(4) حلول المتراجحة $-2x<3$ هي جميع قيم x التي تحقق

① $x<\frac{3}{2}$ ② $x<-\frac{3}{2}$ ③ $x>-\frac{3}{2}$

(5) حلول المتراجحة $3x\leq -6$ ممثلة باللون الأحمر في الشكل

①


②


③


(6) « قبل خمس سنوات كان عمري نصف ما سيصبح عليه بعد خمس سنوات ». إذا رمزتُ إلى عمري الآن بالرمز x، كانت المعادلة المعبرة عن النص هي

① $2(x-5)=x+5$ ② $x=2x+15$ ③ $2x-5=x+5$

(7) حسب النص الوارد في الطلب (6)، عمري الآن هو

① 5 سنوات ② 15 سنة ③ 10 سنوات

(8) العبارة التي قيمتها 10 عند $x=4$ هي

① $x(x+1)$ ② $(x+1)(x-2)$ ③ $(x-1)^2$

(9) جذر المعادلة $2x-(8+3x)=2$ هو

① 10 ② -10 ③ 2

2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) حل المعادلة $5x+2=3x-1$ هو حل المعادلة

① $2x+2=-1$ ② $-2x+2=-1$ ③ $8x+2=-1$

(2) المعادلات التي حلولها أعداد عشرية هي

① $(3x-6)(2x-3)=0$ ② $(2x-1)(3x+2)=0$ ③ $3x(6-2x)=0$

(3) أحد حلول المتراجحة $x-4\geq 2(x+1)$ هو

① -10 ② -6 ③ 0

(4) حل المتراجحة $3x-2\leq 4x-1$ هو حل المتراجحة

① $x-2\leq -1$ ② $-x-2\leq -1$ ③ $7x-2\geq -1$

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي، معللاً إجابتك.

(1) يرمز x إلى عدد موجب. يمكن أن يكون المستطيل الذي بعداه $2x+1$ و $3x+4$ مربعاً.

(2) جذرا المعادلة $x^2-25=0$ هما عددان موجبان.

(3) العدد الوحيد الذي مربعه يساوي ضعفيه هو 2.

(4) كلّ عدد هو حلٌّ للمعادلة $13x-12=x+12(x-1)$.

(5) كلّ عدد أصغر من 3، يكون نظيره أصغر من -3.

(6) كلّ عدد أكبر من 3، يكون مقلوبه أكبر من $\frac{1}{3}$.

(7) أي عدد موجب ليس حلاً للمتراجحة $-3x+1>0$.

4 إذا كان x عدداً يحقّق المتراجحة $x\leq 2$ كان

❶ $x-1\leq \dots$ ❷ $x-2\leq \dots$ ❸ $3+x\leq \dots$

❹ $\frac{x}{2}\leq \dots$ ❺ $-3x\geq \dots$ ❻ $-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\geq \dots$

5 حلّ كلّاً من المعادلات الآتية.

① $3(-x+5)=-5(x+3)$ ② $5-3(x+1)=3-x$

③ $6(x-3)=2(3x-2)-3x$ ④ $(2x-9)(8x-1)=(4x+3)^2$

⑤ $(2x+3)(x-5)=2x(x-2)$ ⑥ $(3x-1)(x+2)=(x-1)(2x+4)$

6 اشترك عدد من الأصدقاء لتنظيم عشاء مشترك يتقاسمون الكلفة بالتساوي. إذا دفع كل منهم 900 ليرة، زاد المبلغ عن الكلفة بمقدار 800 ليرة. وإذا دفع كل منهم 600 ليرة، نقص المبلغ عن الكلفة بمقدار 1300 ليرة. فما عدد هؤلاء الأصدقاء؟

7 الآن، عمر سامر 11 سنة وعمر غيث 26 سنة. بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر سامر؟

8 ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خُمسيه حصلنا على 460 ؟

9 تضم مكتبة رولا أربعة أصناف من الكتب. نصف كتبها مدرسية، ربعها روايات، خُمسها علمية، بالإضافة إلى معجمين. ما عدد كتب رولا؟

10 ABC مثلث قائم في A. $AB = 7 \text{ cm}$ ، وطول $[BC]$ يزيد على $[AC]$ بمقدار 5 cm.
نرمز بالرمز x إلى طول $[AC]$ مقاساً بالسنتيمتر. احسب x.

11 طريقتان للحلّ

نتأمّل المعادلة $(x-3)^2 = 4$.

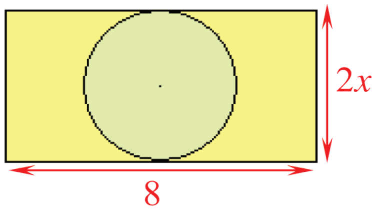
- اقترحت "ريما" الحل التالي: « الأعداد التي مربعاتها 4 هي 2 و -2، ولذا فإن حلول المعادلة $(x-3)^2 = 4$ هي حلول المعادلتين $x-3=2$ و $x-3=-2$ ». أكمل الحلّ.
- اقترحت "لينا" الحل التالي: « المعادلة $(x-3)^2 = 4$ تكتب $(x-3)^2 - 4 = 0$. بتحليل الطرف الأيسر، أحصل على جداء صفري ». أكمل الحلّ.
- وأنت: حلّ المعادلة $(2-x)^2 = 9$.

12 **1.** ① ليكن $M = \frac{4x+2}{5}$. احسب قيمة M عند $x = \frac{3}{4}$.

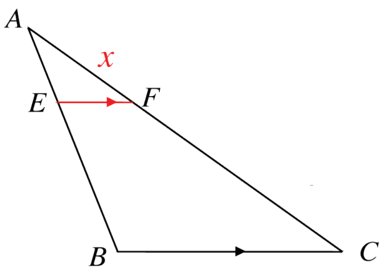
② هل العدد $\frac{3}{4}$ حلٌّ للمتراجحة $3 < \frac{4x+2}{5}$؟

2. حل المتراجحة $3 < \frac{4x+2}{5}$ ومثل حلولها على محور الأعداد.

لإحراز تقدم



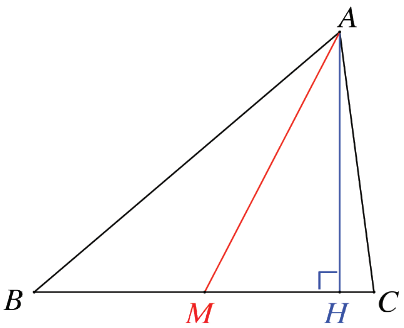
13 في الشكل المرسوم جانباً، يرمز x إلى عدد موجب تماماً. القرص الدائري الأخضر والمستطيل لهما مركز مشترك. الدائرة المحيطة بالقرص تمس ضلعين متقابلين من أضلاع المستطيل. أوجد قيمة x التي تجعل مساحة القرص مساوية لمساحة الجزء الملون بالأصفر.



14 ABC مثلث طول ضلعه $[AB]$ يساوي 6 cm. E نقطة من $[AB]$ تحقق $AE = 2\text{ cm}$. المستقيم المرسوم من E موازياً (BC) يقطع $[AC]$ في F. نعلم أنَّ $FC = 6\text{ cm}$ ونضع $AF = x\text{ cm}$.

1. اشرح لماذا $\frac{1}{3} = \frac{x}{x+6}$.

2. حلّ هذه المعادلة. ما طول كلٍ من $[AF]$ و $[AC]$؟



15 في المثلث ABC، $[AH]$ ارتفاع و $[AM]$ متوسط. نعلم أنَّ $AB = 9\text{ cm}$ و $AC = 6\text{ cm}$ و $MH = 3\text{ cm}$. نضع $BM = x\text{ cm}$ و $AH = h\text{ cm}$.

1. باستعمال مثلثين قائمين، أثبت أنَّ:

$$①\cdots h^2 = -x^2 + 6x + 27 \quad \text{و} \quad ②\cdots h^2 = -x^2 - 6x + 72$$

2. استنتج قيمة x.

16 هناك عرضان في محل تأجير أفلام الفيديو:

- **اشتراك واستعارة:** يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.
- **استئجار:** يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره.

بدءاً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر له ؟

17 هناك عرضان في أحد المسابح كما يأتي:

- **دفع نقدي:** يدفع الشخص 340 ليرة عن كل زيارة للمسبح.
- **اشتراك:** يشترك الشخص ببطاقة سنوية تصلح لعشر زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة.

بدءاً من كم زيارة للمسبح سنوياً يكون العرض الثاني أوفر للشخص؟

4

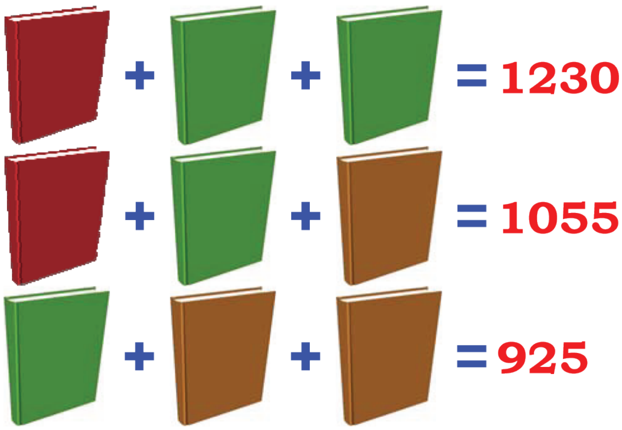
الوحدة الرابعة

جمل المعادلات

1. جملة معادلتين خطيتين بمجهولين
2. معادلة مستقيم
3. حلّ جملة معادلتين خطيتين بيانياً

أحجية الكتب

تأمّل الأحجية الآتية، في الشكل وضعنا سعر كلّ مجموعة من الكتب فما سعر كل واحد منها يا ترى ؟



في هذه مسألة ثلاثة مقادير مجهولة هي سعر كلّ كتاب. وحلُّها يتطلّب حلَّ جملة معادلات تضم هذه المجاهيل.

هناك الكثير من المسائل العملية التي تضم عدداً كبيراً من المجاهيل. ويؤول حل بعض المسائل المهمة، كالتنبؤ بحالة الطقس مثلاً، إلى حلّ جملٍ من آلاف المعادلات بآلاف المجاهيل. وكذلك يمكن يُغني حل بعض الجمل الضخمة من المعادلات بمساعدة الحاسوب عن إجراء الكثير من التجارب المكلفة أو الخطرة، يسمّى هذا الأسلوب مُحاكاة حاسوبية، وهو يفيد أحياناً في تجنّب كوارث أو حوادث أو في التنبؤ بظواهر قبل حدوثها.

جمل المعادلات

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. اختزال عبارة

الصيغة المختزلة للعبارة $3x + 4 - (5x - 7) + 1$ هي

① $-2x - 2$ ② $-2x - 4$ ③ $-2x + 12$

2. حل معادلة

لحل المعادلة $3x + 5 = x - 2$، يمكن أن نكتب

① $3x + x = -2 + 5$

$4x = 3$

$x = 0.75$

0.75 هو الحل

② $2x + 5 = -2$

$2x = -7$

$x = -3.5$

-3.5 هو الحل

③ $2x + 5 = -2$

$2x = -7$

$x = -9$

-9 هو الحل

3. اختبار صحة مساواة

المساواة $3x - 5y - 7 = 6$ صحيحة في حالة

① $x = 1$ و $y = 2$ ② $x = 1$ و $y = -2$ ③ $x = -2$ و $y = 1$

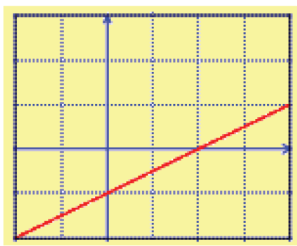
4. التعبير بدلالة y

يرمز x و y إلى عددين يحققان $3x - y = 2$، إذن

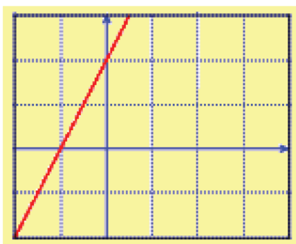
① $y = 3x - 2$ ② $y = 2 - 3x$ ③ $y = -3x - 2$

5. التمثيل البياني لمعادلة

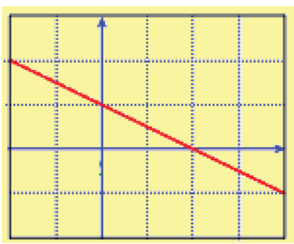
الخط البياني الذي يمثل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 1$ هو



①



②



③

① جملة معادلتين خطيتين بمجهولين

نشاط « نحو التعامل مع مجهولين »

1. **ما اشتراه صلاح:** اشترى صلاح أربعة أقلام رصاص بسعر x ليرة سورية لكل قلم، وقلم حبر سعره y ليرة. دفع صلاح مبلغ 85 ليرة ثمن الأقلام التي اشتراها.

① عبِّر عن معطيات هذا النص بمعادلة فيها x و y.

② في حالة كون سعر قلم الرصاص 15 ليرة، كم يكون سعر قلم الحبر؟

③ في حالة كون سعر قلم الحبر 25 ليرة، كم يكون سعر قلم الرصاص؟

④ هل يمكن أن يكون سعر قلم الرصاص الذي اشتراه صلاح 22 ليرة؟ لماذا؟

2. **ما اشتراه زياد:** اشترى زياد قلمي رصاص بسعر x ليرة لكل قلم، وثلاثة أقلام حبر بسعر y ليرة لكل قلم. دفع زياد مبلغ 95 ليرة ثمن الأقلام التي اشتراها.

① عبِّر عن معطيات هذا النص بمعادلة فيها x و y.

② هل يمكن أن يكون سعر قلم الحبر 15 ليرة وسعر قلم الرصاص 25 ليرة مع كون ثمن الأقلام جميعاً 95 ليرة؟ وهل يمكن أن يكون سعر قلم الرصاص 15 ليرة وسعر قلم الحبر 20 ليرة؟ اشرح!

$$\begin{cases} 4x + y = 85 & (1) \\ 2x + 3y = 95 & (2) \end{cases}$$

في المثالين السابقين، لا نعلم إذن كم يساوي سعر قلم الرصاص x ولا كم يساوي سعر قلم الحبر y. تسمى كلُّ ثنائية مرتبة (x,y) تُحقّق المعادلتين (1) و (2) في آنٍ معاً، **حلّاً** لجملة هاتين المعادلتين.

3. **حلّ جملة معادلتين، من الدرجة الأولى، بمجهولين**

كيف وجد صلاح وزياد الحل المشترك للمعادلتين (1) و (2)؟

- كتب صلاح: « إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $y = 85 - 4x$ »
- أردف زياد: « إذن $2x + 3(85 - 4x) = 95$ »

① اشرح كيف حصل صلاح وزياد على معادلتيهما. حلّ بعدئذ معادلة زياد.

② بحل معادلة زياد ستجد قيمة x . عد إلى معادلة صلاح لتجد y .

③ تحقق من أنَّ قيمتي x و y اللتين حصلت عليهما تحققان كلاً من المعادلتين (1) و (2).

④ ما قيمة كلٍ من قلم الرصاص وقلم الحبر؟

تعلّم

تعريف

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بالمجهولين x و y هي من النمط:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث a و b و c و a' و b' و c' أعداد معلومة.

تعريف

- كلّ ثنائيّة (x,y) تُحقق كلّاً من معادلتي الجملة تسمّى **حلّاً** لهذه الجملة.
- حلُّ جملة معادلتين بالمجهولين x و y، هو إيجاد جميع حلول الجملة.

جمل المعادلات المطروحة في هذا الصف لها حلٌّ وحيد ولكن ستجد في صفوف لاحقة جملاً لا تتمتع بوحدانية الحل.

4

مثال في ما يأتي تجد جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

- عندما $x = 2$ و $y = -1$ لدينا $2x - y = 2\times 2 - (-1) = 5$، فالثنائية $(2,-1)$ تُحقّق المعادلة (1).
ومن جهة أخرى $x + y = 2 + (-1) = 1$، فالثنائية $(2,-1)$ **لا** تحقق المعادلة (2).
نستنتج أنَّ الثنائية $(2,-1)$ ليست حلّاً للجملة.
- عندما $x = 3$ و $y = 1$: لدينا $2x - y = 2\times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$، فالثنائية $(3,1)$ تُحقّق المعادلة (1). ومن جهة أخرى $x + y = 3 + 1 = 4$، فالثنائية $(3,1)$ تحقّق **أيضاً** المعادلة (2).
نستنتج أنَّ الثنائية $(3,1)$ حلّ لجملة المعادلتين.

اكتســاب معــارف

كيف نحل جملة معادلتين؟

لحل جملة معادلتين بمجهولين، **نردّ** الحالة إلى **حل معادلة بمجهول واحد**. ولتحقيق هذا الانتقال، يمكن أن نستعمل **طريقة الحذف بالتعويض** كما في المثال الآتي:

مثال حلّ الجملة

$$\begin{cases} x+2y=8 & (1) \\ 3x-y=3 & (2) \end{cases}$$

الحلّ

① **نكتب** أحد المجهولين، من إحدى المعادلتين، بدلالة الآخر. تُكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$x=8-2y$$

② **نعوض** قيمة x في المعادلة (2).

$$3(8-2y)-y=3$$

③ **نحلّ** المعادلة ذات المجهول الواحد الناتجة:

$$24-6y-y=3$$
$$24-7y=3$$
$$-7y=-21$$
$$y=\frac{-21}{-7}$$
$$y=3$$

④ **نعوّض** قيمة y التي حصلنا عليها في العبارة التي حصلنا عليها في الخطوة ①.

$$x=8-2\times3=8-6=2$$

⑤ **نتحقق** من أنّ $x=2$ و $y=3$ يحققان معادلتي الجملة (هذه الخطوة **ليست جزءاً من الحل**، لكنها مفيدة لدرء الوقوع في أي خطأ حسابي محتمل).

$x+2y=2+2\times3=2+6=8$ و $3x-y=3\times2-3=6-3=3$.

⑥ **نختم الحلّ**

فالثنائية $(2,3)$ هي حل الجملة السابقة.

كيف ننتقل من نص مكتوب لمسألة إلى جملة معادتين ثمّ إلى الحل؟

لحل مسألة من هذا النمط نتّبع الآتي:

① نختار المجاهيل ونرمّزها.

② نؤلّف جملة معادلتين.

③ نحلّ الجملة.

④ نُجيب عن طلبات المسألة.

كيف نحل جملة معادلتين بطريقة أخرى؟

لحل جملة معادلتين بمجهولين، يمكن أن نستعمل **طريقة الحذف بالجمع** كما في المثال الآتي:

مثال اشترت سارة ستة دفاتر وخمسة أقلام بمبلغ 570 ليرة. واشترى شقيقها سامر ثلاثة دفاتر وسبعة أقلام بمبلغ 555 ليرة. ما سعر الدفتر؟ وما سعر القلم؟

الحل

① اختيار المجاهيل

نرمز إلى سعر الدفتر بالرمز x وإلى سعر القلم بالرمز y.

② كتابة جملة معادلات

- ثمن ستة دفاتر $6x$ وثمن خمسة أقلام $5y$، إذن استناداً إلى النص: $6x+5y=570$.
- ثمن ثلاثة دفاتر $3x$ وثمن سبعة أقلام $7y$، إذن استناداً إلى النص: $3x+7y=555$.

فنحصل بذلك على جملة المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} 6x+5y=570 & (1) \\ 3x+7y=555 & (2) \end{cases}$$

③ حلّ الجملة

- نتأمل حدود معادلتي الجملة، فنجد $6x=2\times 3x$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد -2 لنحصل على جملة مكافئة للجملة السابقة:

$$\begin{cases} 6x+5y=570 & (1) \\ -6x-14y=-1110 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x+5y=570 \\ -6x-14y=-1\,110 \\ \hline 0x-9y=-540 \end{array}$$

نجمع معادلتي الجملة طرفاً مع طرف، فنحصل على $-9y=-540$

نحلّ المعادلة الأخيرة فنجد $y=\dfrac{-540}{-9}=60$.

نعوض $y=60$ في إحدى معادلتي الجملة، ولتكن المعادلة (2)، فنحصل على $3x+7\times 60=555$.

نحلّ هذه المعادلة بالمجهول x فنجد $x=45$.

- التحقّق من النتائج. نتحقق من أنّ $x=45$ و $y=60$ يحققان معاً معادلتي الجملة:

$$6x+5y=6\times 45+5\times 60=270+300=570$$

$$3x+7y=3\times 45+7\times 60=135+420=555$$

إذن حل الجملة الأولى هو الثنائية $(45,60)$.

④ الإجابة عن طلبات المسألة.

النتيجة: سعر كلّ دفتر 45 ليرة وسعر كلّ قلم 60 ليرة.

4

تحقّق من فهمك

① أيٌّ الثنائيات $(7,-3),(-13,9),(2,-1),(-1,2)$ حلٌّ:

❶ للمعادلة $2x+3y=1$ ؟

❷ للمعادلة $3x+5y=6$ ؟

❸ للجملة $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=6\end{cases}$ ؟

② حلّ كلّاً من جمل المعادلات الآتية:

❶ $\begin{cases}x+4y=14\\x+11y=35\end{cases}$
❷ $\begin{cases}4x+y=-14\\3x+2y=-8\end{cases}$

❸ $\begin{cases}0.3x+0.2y=9\\x+4y=10\end{cases}$
❹ $\begin{cases}x-11=y+11\\x-y=2(y+19)\end{cases}$

تدرّب

① جِد الأعداد الناقصة لتكون الثنائية $(2,-5)$ حلاً للجملة :

$$\begin{cases}6x-y=\cdots\\\cdots x+2y=4\end{cases}$$

② أيٌّ الثنائيات $(4,-10)$ $(3,18)$, $(-0.5,+0.5)$, حلٌّ للجملة :

$$\begin{cases}7x+3y=-2\\-5x+y=3\end{cases}$$

③ حلّ كلّاً من الجمل الآتية :

❶ $\begin{cases}5x+4y=60\\-5x-3y=105\end{cases}$
❷ $\begin{cases}4x-3y=32\\-2x+3y=2\end{cases}$

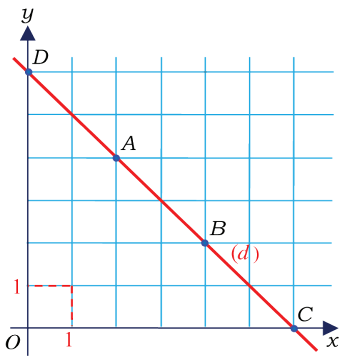
❸ $\begin{cases}-2x+3y=5\\5x+9y=-7\end{cases}$
❹ $\begin{cases}6x+7y=7\\-3x+2y=-31\end{cases}$

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، هل الثنائية $(-4,3)$ هي حل الجملة؟

❶ $\begin{cases}y-3x=15\\-3x+4y=0\end{cases}$
❷ $\begin{cases}x+\dfrac{5}{3}y=1\\-\dfrac{3}{8}x-2y=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$

2 معادلة مستقيم

نشاط « المعنى الهندسي لمعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين»



.1 ليكن المستقيم (d) المرسوم جانباً.

① اكتب إحداثيات النقاط A,B,C,D. ماذا تلاحظ عند جمع فاصلة كلّ من هذه النقاط مع ترتيبها؟

② اختر نقاطاً أخرى على (d) هل تبقى الخاصة السابقة صحيحة في حالة النقاط التي اخترتَها؟

③ هل تقع النقطة $(1,4)$ على المستقيم (d)؟

.2 ① حدّد في المعلم السابق النقاط $(0,4)$، $(1,4)$، $(2,4)$، $(4,4)$، ثم صل بينها، تيقّن أنّها تقع على مستقيم (d')؟ ما الخاصّة التي تحقّقها جميع نقاط هذا المستقيم؟

② ارسم من النقطة $(3,1)$ مستقيماً شاقولياً (d'') يوازي محور التراتيب Oy. وخذ عليه عدداً من النقاط ودوّن إحداثياتها. ماذا تلاحظ بشأن فواصل هذه النقاط؟ ما الخاصّة التي تحقّقها جميع نقاط هذا المستقيم؟

.3 لتكن المعادلة (1) $2x+y=5$. نسمي هذه المعادلة "معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين".

① نفترض أنّ x و y ترتبطان معاً بالعلاقة (1). انسخ الجدول الآتي إلى دفترك ثم أكمله

x	4	$\cdots$	-2
y	$\cdots$	$+3$	$\cdots$

② أي الثنائيات $(1,3), (2,2), (3,1), (0,5), (4,1), (-1,7)$ تحقّق المعادلة (1)؟

عموماً يمكن إيجاد عدد غير منتهٍ من الثنائيات التي تحقق المعادلة (1).

③ مثّل، في معلمٍ، الثنائيات التي تحقّقتَ أنّها حلول للمعادلة (1). هل يمكنك رسم مستقيم يمر بهذه النقاط؟

نقبل أنّ إحداثيات كلّ نقطة تقع على المستقيم الذي وجدتَه تمثّل حلّاً لهذه المعادلة.

④ في حالة كلّ معادلة من المعادلات الآتية، جِدْ نقطتين تحقّقانها ثُمّ ارسم في معلم المستقيمات الممثّلة لكل منها :

❶ $-x+y=3$ ❷ $x+y=3$

❸ $2x+y=1$ ❹ $x-y=0$

يتعين المستقيم بنقطتين لذلك يمكن أن نكتفي بتعيين نقطتين ومن ثَمَّ رسم المستقيم.

4

تعلّم

في مَعلَمٍ، مجموعةُ النقاط $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها المعادلة $ax+by=c$ $(a,b)\neq(0,0)$ هي مستقيم (d). إذن

- كل نقطة إحداثيّتاها (x,y) تحققان المعادلة $ax+by=c$ هي نقطة من المستقيم (d).

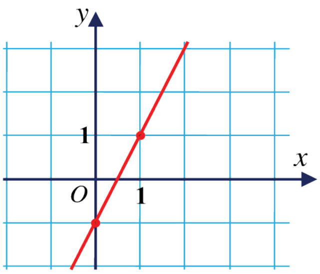
- بالعكس، تحقّق إحداثيّتا كل نقطة من المستقيم (d) المعادلة $ax+by=c$.

نسمّي إذن المعادلة $ax+by=c$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$ معادلة المستقيم (d).

مثال ليكن (d) المستقيم الذي معادلته $2x-y=1$. ارسم المستقيم (d).

الحل لإيجاد نقطتين من المستقيم يمكن أن نملأ الجدول الآتي:

x	0	1
y	-1	1



نرسم المستقيم (d) ماراً بالنقطتين $A(0,-1)$ و $B(1,1)$. فيكون (d) هو التمثيل البياني للمعادلة $2x-y=1$.

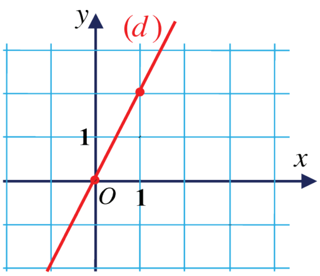
تحقّق من فهمك

ارسم المستقيمات التي تعطي التمثيل البياني لكل من المعادلات الآتية.

❶ $x+3y=3$ ❷ $y=x+3$ ❸ $y+2=0$

❹ $y=-x$ ❺ $x=3$ ❻ $2x+y=0$

تدرّب



ليكن المستقيم (d) المرسوم جانباً.

① اكتب نقطتين من هذا المستقيم.

② أي من المعادلات الآتية هو تمثيل للمستقيم (d).

❶ $y=x+1$ ❷ $x+2y=1$ ❸ $y=2x$

تذكّر أنّ كلّ مستقيم يمر بالمبدأ ولا يوازي محور التراتيب Oy يمكن كتابة معادلته بالشكل $y=mx$.

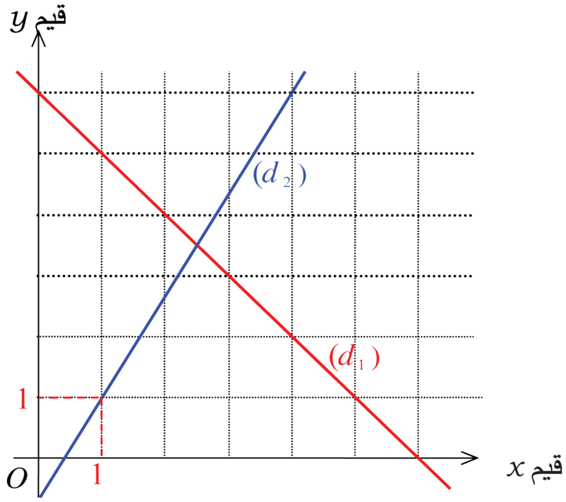
3 حلّ جملة معادلتين خطيتين بيانياً

نشاط « نحو الحل بيانياً»

مستقيمات: أراد علاء أن يرسم مستطيلاً يحقّق الشرطين الآتيين:

(1) نصف محيطه يساوي $6\ \text{cm}$.

(2) ثلاثة أمثال طوله مطروحاً من خمسة أمثال عرضه يساوي $2\ \text{cm}$.



① نرمز إلى عرض هذا المستطيل بالرمز x وإلى طوله بالرمز y (بالسنتيمتر). عبّرْ عن (1) و (2) بجملة معادلتين خطيتين بالمجهولين x و y.

② عبّر علاءٌ في كلٍ من (1) و (2) عن y بدلالة x، فوجد من (1): $y = 6 - x$. ماذا وجد من (2)؟

③ مثّلَ علاءٌ بيانياً، كلاً من العلاقتين اللتين حصل عليهما، فحصل على ما ترى في الشكل المرافق. كيف تصرف علاءٌ؟

④ اقرأ على الشكل الحل المشترك لجملة المعادلتين وتحقق من صحة ما وجدت.

⑤ ما بعدا المستطيل الذي يسعى إليه علاء؟

تعلّم

مثال

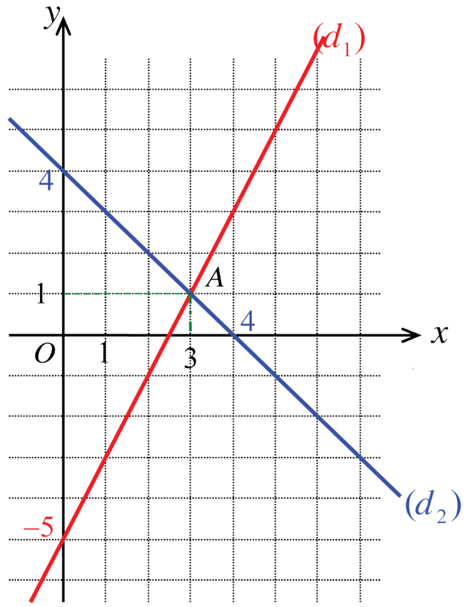
تأمّل الجملة الآتية:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

تُكتب المعادلة (1) بالشكل ① $y = 2x - 5$.

تُكتب المعادلة (2) بالشكل ② $y = -x + 4$.

4



يبدو من الشكل المرافق، أنَّ المستقيمين (d_1) و (d_2) يتقاطعان في النقطة $A(3,1)$. ولكن هذا لا يكفي لإقرار الحلّ، بل يجب التحقّق من أنَّ الثنائية $(3,1)$ تحقّق كلاً من معادلتي الجملة (S). عندها فقط يمكننا إقرار أنَّ الثنائية $(3,1)$ هي حل الجملة (S).

حلّ الجملة (S)، يعود إلى إيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2)، وهما على التوالي الخطان البيانيان، في معلم متجانس، للمعادلتين:

① $y = 2x - 5$ و ② $y = -x + 4$

اكتســاب معــارف

كيف نحلّ بيانياً جملة معادلتين؟

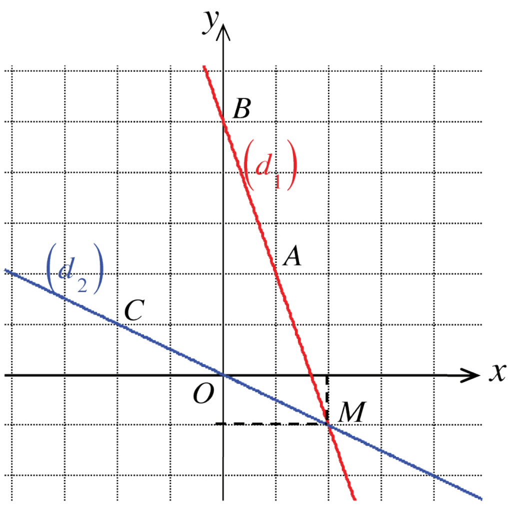
مثال لتكن الجملة
$$\begin{cases} 3x + y = 5 & (1) \\ x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

① احسب y بدلالة x من كلٍّ من معادلتي الجملة.

② ارسم، في معلم متجانس، الخطين البيانيين للمعادلتين اللتين وجدتهما في ①.

③ اقرأ من الشكل حل الجملة، ثم تحقّق من الحل بالتعويض.

الحلّ



① • نطرح $3x$ من طرفيّ المعادلة (1): $y = -3x + 5$

• نطرح x من طرفيّ المعادلة (2): $2y = -x$، ونقسم كلاً من طرفيها على 2 : $y = -\frac{1}{2}x$.

② **الخط البياني لمعادلة من الدرجة الأولى هو مستقيم، فيتعين بنقطتين منه.**

نرسم المستقيم (d_1)، الخط البياني للمعادلة $y = -3x + 5$ ماراً بالنقطتين $A(1,2)$ و $B(0,5)$.

ونرسم المستقيم (d_2)، الخط البياني للمعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ ماراً بالنقطتين $O(0,0)$ و $C(-2,1)$.

③ ننظر في الشكل إلى نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2) ونقرأ إحداثيتيها. في الشكل، تبدو $M(2,-1)$ نقطة تقاطع المستقيمين (d_1) و (d_2). فيفترض أن تكون الثنائية $(2,-1)$ حل الجملة.

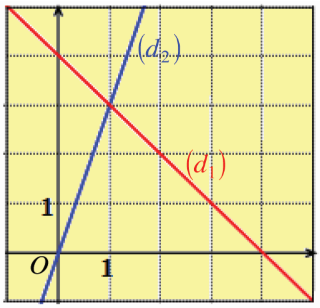
④ ولكن، قد لا يكون الرسم دقيقاً، وقد نكون قد تعرضنا خلال الحل لأخطاء حسابية، لذا علينا أن نتحقق من أنَّ الثنائية $(2,-1)$ هي حل الجملة المدروسة. لنتحقق:

$3x+y=3(2)+(-1)=5$. فالمعادلة **(1)** محققة، وكذلك فإنّ $x+2y=2+2(-1)=0$. فالمعادلة **(2)** محققة. وبهذا تكون الثنائية $(2,-1)$ حلاً للجملة السابقة.

تحقّق من فهمك

لحل الجملة
$$\begin{cases} x+y=4 & (1) \\ 3x-y=0 & (2) \end{cases}$$

رسمت لنا مستقيمين في المعلم المرافق.



1. ما هي عبارة y بدلالة x التي استخدمتها لنا

① لرسم المستقيم (d_1) ؟

② لرسم المستقيم (d_2) ؟

2. اقرأ على الشكل حل الجملة، ثم تحقق من الحل.

تدرّب

① لدينا الجملة
$$\begin{cases} 4x+3y=-6 & (1) \\ 2x+y=-3.5 & (2) \end{cases}$$

1. مثِّل هذه الجملة بيانياً.

2. اقرأ على الشكل حلاً تقريبياً لهذه الجملة.

3. حل الجملة جبرياً وقارن الحل الجبري بالحل الذي قرأته على الشكل.

② لدينا الجملة
$$\begin{cases} 5x+2y=12 & (1) \\ x+2y=8 & (2) \end{cases}$$

1. اكتب y بدلالة x من كلٍ من معادلتي الجملة.

2. في معلم ديكارتي، مثِّل بيانياً كلاً من المعادلتين اللتين وجدتهما في السؤال السابق.

3. اقرأ من الشكل حلّ الجملة، ثم تحقّق مما قرأت حسابياً.

4

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) حل الجملة $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ هو الثنائية

① $(5,-4)$

② $(-5,4)$

③ $(4,-5)$

(2) لحلّ الجملة $\begin{cases} 7x-y=1 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $y=7x-1$ ثم $4x+3(7x-1)=2$

② $y=1-7x$ ثم $4x+3(1-7x)=2$

③ $y=7x-1$ ثم $7x-(7x-1)=1$

(3) لحلّ الجملة $\begin{cases} 4x-y=3 \\ -x+y=5 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $4x-y+(-x+y)=2$

② $4x-y-(-x+y)=2$

③ $4x-y+(-x+y)=8$

(4) لحلّ الجملة $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x-10y=1 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $2(2x+5y)-(7x-10y)=5$

② $7x-10y+2(2x+5y)=7$

③ $7x-10y-2(2x+5y)=-5$

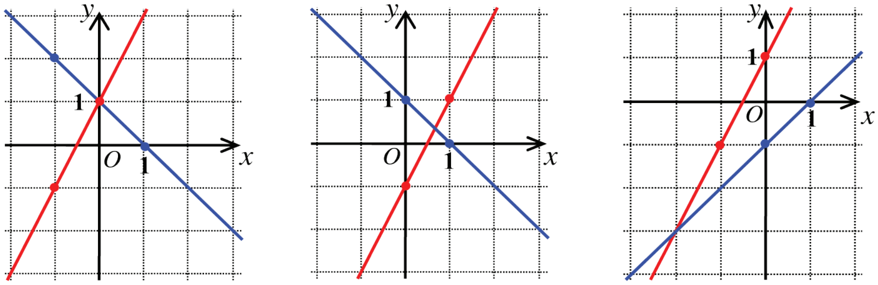
(5) تكلفة شراء أربعة دفاتر وخمسة مصنفات 1850 ليرة وتكلفة شراء ستة دفاتر وسبعة مصنفات 2 670 ليرة يمكن التعبير عن هذه الحالة بالجملة

① $\begin{cases} 4x+5y=1\,850 \\ 6x+7y=2\,670 \end{cases}$

② $\begin{cases} 4x+5y=1\,850 \\ 6y+7x=2\,670 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 5y+4x=1\,850 \\ 6y+7x=2\,670 \end{cases}$

(6) تُمثّل الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ في معلم متجانس بالشكل



① ② ③

2

في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) لحل الجملة $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+7y=1 \end{cases}$ يمكن البدء بكتابة

① $x=1-7y$ ثم $2(1-7y)-y=5$

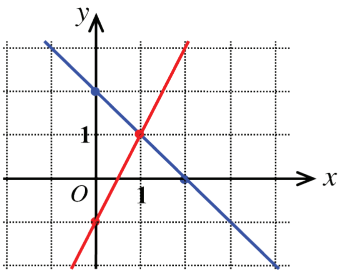
② $y=2x-5$ ثم $x+7(2x-5)=1$

③ $2x-y-2(x+7y)=3$

(2) أحد حلول المعادلة $6x-5y=8$ هو الثنائية.

① $(3,2)$ ② $(-4.6,-7)$ ③ $(10.1,10.52)$

(3) الشكل المرسوم هو تمثيل بياني للجملة



① $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=6 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} y=2x \\ y=-x+2 \end{cases}$

3

قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي، معللاً اجابتك.

(1) الجملة $\begin{cases} x+2y=5 & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$ لها الحل $(1,2)$.

(2) المعادلتان (1) $x+y=1$ و (2) $4x+4y=4$ متكافئتان.

(3) الثنائية $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ حل للجملة $\begin{cases} 6x+8y=-3 & (1) \\ x-10y=8 & (2) \end{cases}$.

(4) الجملتان $\begin{cases} 2(x+y)-3y=4 \\ x+2y=4 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$ متكافئتان.

(5) المعادلة $(x+2)(-y+3)=0$ (*) والجملة $\begin{cases} 5x-3y=-19 & (1) \\ 2x+y=-1 & (2) \end{cases}$ (**) لهما الحلول ذاتها.

(6) ترشح شخصان لمنصب رئيس جمعية مؤلفة من 1000 ناخب. نال الخاسر 250 صوتاً أقل من الفائز، فيكون الفائز قد نال 625 صوتاً.

4 دفع جمال ثمن دفترين وثلاثة أقلام 110 ليرات. عبَّرنا عن هذا النص بالمعادلة $2x+3y=110$. إلامَ يرمز x؟ وإلامَ يرمز y؟

5 لدينا الجملة $\begin{cases} 5x-y=15 \\ x+2y=4 \end{cases}$

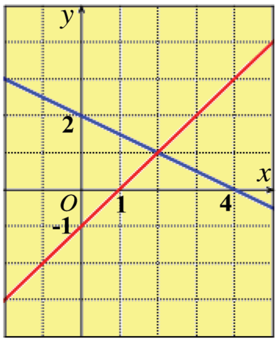
أيٌّ من معادلتيها هي الأفضل لكتابة y بدلالة x؟ وأيهما الأفضل لكتابة x بدلالة y؟ علّل.

6 لدينا الجملة $\begin{cases} 2x+y=-4 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{cases}$

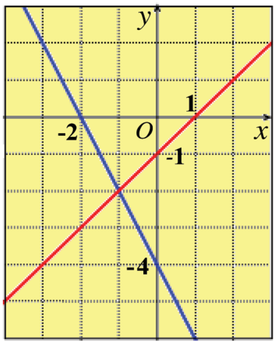
ولدينا الشكلان ① و ②:

1. حل الجملة.

2. أي من هذين الشكلين يمثل هذه الجملة؟



①



②

7 لدينا الجملة $\begin{cases} x+y=32 & (1) \\ 3x+5y=124 & (2) \end{cases}$

1. حلّ هذه الجملة.

2. رسم عدنان 32 مضلعاً بعضها مثلثات والبعض الآخر مضلعات خماسية. أحصى عدنان عدد أضلاع جميع المضلعات التي رسمها فوجدها 124 ضلعاً. ما عدد المثلثات وما عدد المضلعات الخماسية التي رسمها عدنان؟ تحقق من إجابتك.

8 جِدْ ذهنياً عددين:

① مجموعهما 80 والفرق بينهما 4.

② مجموعهما 4 والفرق بينهما 80.

9 حل كلّاً من جمل المعادلات الآتية:

① $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=8 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x-\frac{8}{3}y=5 \\ 4x-2y=\frac{10}{3} \end{cases}$

③ $\begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{5} \\ 5x+4y=80 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=5 \\ x-\sqrt{2}y=0 \end{cases}$

لإحراز تقدّم

10 رؤوس وقوائم

في إحدى المزارع أرانب ودجاجات. عدد رؤوس هذه الحيوانات 28 وعدد قوائمها 76. ما عدد الدجاجات في هذه المزرعة؟ وما عدد الأرانب فيها؟

11 طوابع بريدية

مجموع ما يقتني الصديقان ماهر وعامر 144 طابعاً بريدياً. إذا أعطى ماهر اثنين من طوابعه لعامر أصبح لدى عامر مثلي ما لدى ماهر. ما عدد الطوابع التي لدى كلٍّ من الصديقين؟

4

12 عُلمَ فرقهما

الفرق بين عددين هو 15. إذا أضفنا 10 إلى كلٍّ من هذين العددين أصبح أكبر الناتجين مثلي أصغرهما. ما هما هذان العددان؟

13 أعمار

عمر لجين الآن ثلاثة أمثال عمر جمانة. وبعد 15 سنة، يصبح عمر لجين مثلي عمر جمانة. ما عمر كلّ من لجين وجمانة ؟

14 سرعة

قطع راكب دراجة مسافةً على مرحلتين بالسرعة الوسطى نفسها. استغرق في المرحلة الأولى ساعة وربع وفي المرحلة الثانية ساعة ونصف. نعلم أنَّ المسافة التي قطعها في المرحلة الثانية تزيد عن تلك التي قطعها في المرحلة الأولى بمقدار 4 km.

1. بأية سرعة وسطى كانت تسير الدرّاجة؟

2. ما المسافة التي قطعها في كلٍّ من المرحلتين؟

15 مع القسمة الإقليدية

جِدْ عددين صحيحين موجبين، مع العلم أنَّ:

- مجموعهما يساوي 241.
- إذا قسمنا أكبرهما على أصغرهما، كان خارج القسمة 4 وباقيها 11.

5

الوحدة الخامسة
التابع

1. مفهوم التابع
2. طرائق تعريف التابع

إنّ محيط الدائرة تابع لنصف قطرها وأيضاً مساحتها فكلّ منهما يتغيّر بتغيّر نصف القطر. كذلك الضغط الجويّ تابع للارتفاع عن سطح البحر.

يُعتبر مفهوم التابع حديثاً جداً بالقياس إلى التاريخ الطويل للرياضيّات. فقد بدأت ملامح هذا المفهوم بالظهور بوضوح في القرن السابع عشر الميلادي على يد عالم الرياضيّات لايبنتز وهو الذي استخدم كلمة تابع لأوّل مرّة. بعد ذلك تطوّر هذا المفهوم رويداً رويداً وزاد استخدامه في الرياضيّات وفي العلوم الأخرى.

تأتي أهميّة التوابع من قدرتها على تحديد تابعيّة مقدار ما بدلالة متغيّرات أخرى. وقد أسهم الاستخدام الواسع للتوابع في تحويل العبارات الوصفيّة اللفظيّة إلى تعابير جبريّة وقوانين واضحة ودقيقة.

في هذه الأيّام تُدرس التوابع دراسة مستفيضة لتحديد خصائصها المختلفة، وهذا ما يساعد على الفهم الدقيق للظواهر المختلفة.

التابع

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. مراعاة أولويات العمليات

العدد $2 + 3^2 \times 4$ يساوي

① 144 ② 44 ③ 38

2. استعمال الأقواس

نختار عدداً x، نطرح منه العدد 2، ثم نضرب الناتج بالعدد 3، فنحصل على

① $3x - 2$ ② $3(x-2)$ ③ $2(x-3)$

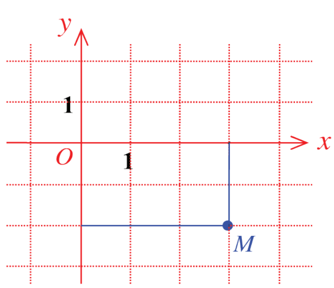
3. استعمال صيغة

تُعطى مسافة الأمان بين سيارتين بالصيغة $\mathcal{D} = 8 + 0.2\ V + 0.003\ V^2$ حيث $\mathcal{D}$ المسافة مقاسة بالأمتار، و V هي سرعة السيارة مقاسة بالكيلومتر في الساعة. مسافة الأمان بالنسبة إلى سيارة سرعتها $50\ km/h$ هي

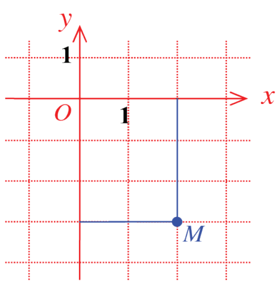
① $18.0225\ m$ ② $25.5\ m$ ③ $417.5\ m$

4. رسم نقطة عُلِمت إحداثيتاها

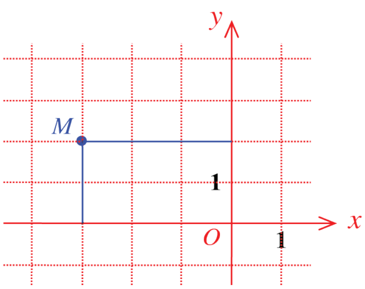
الموضع الصحيح للنقطة M التي فاصلتها 3 وترتيبها -2، هو في الشكل



①



②



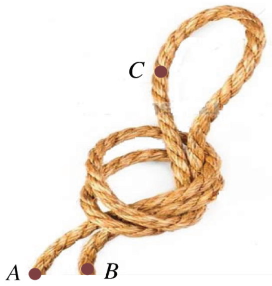
③

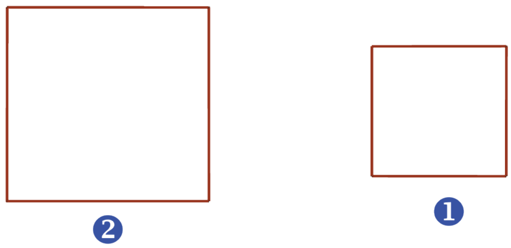
1 مفهوم التّابع

نشاط «مجموعة تعريف تابع ومجموعة قيمه وقاعدة ربطه»

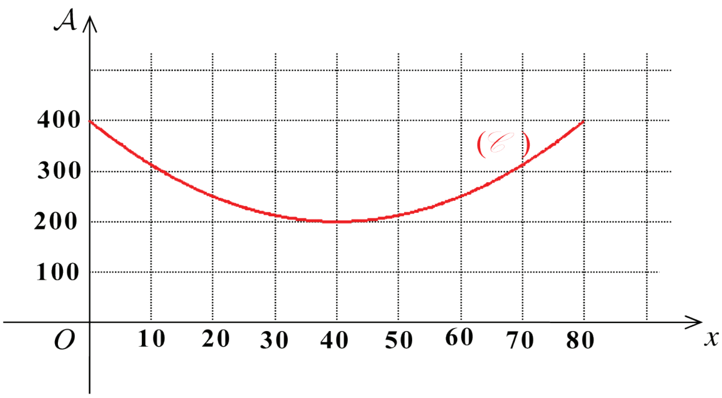
1. صياغة تابع

- حبل طوله $80\ m$، طرفاه A و B. جزَّأنا الحبل إلى قطعتين $[AC]$ و $[BC]$.
- صنعنا من القطعة $[AC]$ المربع ❶ ومن القطعة $[BC]$ المربع ❷.





- يرمز x إلى طول القطعة $[AC]$ و $\mathcal{A}$ إلى مجموع مساحتي المربعين.
- الشكل الآتي تمثيلٌ لـ $\mathcal{A}$ بدلالة x.



بمعنى أنَّ ترتيب كلّ نقطة (x,y) من الخط البياني $(\mathscr{C})$ هي قيمة $\mathcal{A}$ الموافقة.

أولاً: استعن بالشكل وأجب (يمكن أن تجيب بقيم تقريبية).

1. ما مجموعة قيم x؟

2. انسخ وأكمل الجدول الآتي:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$\mathcal{A}$	......	......	......	......	......	......	......	......

3. ما قيمة x عندما $\mathcal{A} = 200$.

4. ما قيمة x التي تتساوى عندها مساحتا المربعين ❶ و ❷؟

ثانياً: تعريف تابع

1. احسب، بدلالة x ، مساحة المربع ❶ ولتكن $\mathcal{A}_1$ ، ثم مساحة المربع ❷ ولتكن $\mathcal{A}_2$.

2. أثبت أنَّ $\mathcal{A} = \frac{1}{8}\left(x^2 - 80x + 3200\right)$.

3. تحقق من إجاباتك في الفقرة السابقة.

مصطلحات

- بقراءة دقيقة للرسم البياني، نجد أنَّ كلّ قيمة للمتحول x تقابلها قيمة واحدة للمقدار $\mathcal{A}$.
- في الرياضيات، نقول إننا عرَّفنا تابعاً يقرن بكل قيمةٍ للطول x قيمةً واحدة للمساحة $\mathcal{A}$ والتي يُمكن أن نرمز إليها بالرمز $\mathcal{A}(x)$.
- إذا رمزنا إلى هذا التابع بالرمز f (وقد نرمز إليه بأي رمز مثل k أو g أو h ...) ، عندئذ نكتب $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^2 - 80x + 3\,200\right)$.

ونسمي هذه الكتابة **قاعدة ربط التابع** (أو صيغته) ونسمي x متحول هذه العلاقة.

- إذا كتبنا $y = f(x)$ قلنا إنَّ y هو صورة x وفق التابع f وأيضاً نقول إنّ x هو سَلَف لـ y وفق التابع f .
- لاحظ أنّه في هذا المثال يجب أن يكون x محصوراً بين 0 و 80 .

مجموعة القيم التي نسمح للمتحول x أن يأخذها تسمى **منطلق** التابع أو **مجموعة تعريفه**.

2. آلة إنتاج أعداد هي آلة كلما لقَّمناها عدداً x أنتجت لنا عدداً y واحداً فقط.

$$x \to \boxed{\boxed{x^2} \to \boxed{+1} \to \boxed{\times 2}} \to y$$

الآلـة

هذه الآلة هي تجسيد لتابع f حيث $f(x) = y$.

1. تحقق من أنَّ $f(4) = 34$. أي إنّنا إذا أدخلنا في الآلة العدد 4 حصلنا على العدد 34 .

2. أثبت أنَّ العدد 34 هو أيضاً صورة للعدد -4 وفق التابع f .

3. اكتب عبارة $f(x)$ بدلالة x .

4. احسب كلاً من $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(100)$ و $f(3.1)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

تعلّم

مفهـوم التابــع

التابع f هو إجرائيّة تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$.

مثال نربط بكل عدد مربعَه. **هنا نعرِّف تابعاً** إذ لا يوجد سوى مربع واحد لكل عدد. يمكن أن نرمز لهذا التابع برمزٍ مثل f على سبيل المثال. «مربع العدد 3 هو 9» يقال بلغة التوابع : «العدد 9 هو **صورة** العدد 3 وفق التابع f» ونكتب $9 = f(3)$ ونقرأ "f عند 3 يساوي 9" أو اختصاراً "f 3 يساوي 9". يمكن أن يكون عددٌ ما صورة لعددين مختلفين. فعلى سبيل المثال، صورة العدد -3 هي أيضاً العدد 9.

$$3 \to \boxed{f} \searrow 9 \nearrow \boxed{f} \leftarrow -3$$

تعريف

نسمّي تابعاً للمتحوّل x كل إجرائيّة تربط بكلّ عدد x عدداً وحيداً $f(x)$.

يُسمّى $f(x)$ صورة x وفق التابع f.

أحياناً، يُرمز إلى التابع f بالرمز $x \mapsto f(x)$

مثال في المثال السابق، يمكن أن نرمز إلى التابع بالرمز $f(x) = x^2$ أو بالرمز $x \mapsto x^2$.

تحقّق من فهمك

① في العمود الأيسر من الجدول المرافق معلومات عن تابعٍ f . انسخ ثم أكمل هذا الجدول.

صيغة رمزيّة	صيغة لفظيّة
$f(\cdots) = \cdots$	3 هو صورة 2
$f(\cdots) = \cdots$	-1 هو صورة 8
$f(\cdots) = \cdots$	4 هو صورة 5
$f(\cdots) = \cdots$	13 هو صورة -7

② هذه معلومات عن تابعٍ h : $h(-1) = 3$ و $h(1) = h(5) = 0$

1. عبِّر عن المعلومة $h(-1) = 3$ بجملةٍ تتصدرها كلمة «**صورة**»

2. عبِّر عن المعلومة $h(1) = h(5) = 0$ بجملةٍ تحوي كلمة «**صورة**»

تدرّب

③ الشكل المرافق هو جدول قيم تابعٍ f . انسخ هذا الجدول في دفترك ثم أكمل:

① وفق التابع f العدد …… هو صورة العدد 1.

② وفق التابع f العدد 5 هو صورة لكل من العددين 0 و ……

③ وفق التابع f العدد 10 هو صورة العدد…… هو …….

x	$f(x)$
0	5
1	-2
2	-5
3	10
4	5

2 طرائق تعريف التّابع

.1 آلات أخرى لإنتاج أعداد

الآلة (1): ليكن g التابع الذي يربط بكل عددٍ t العددَ $g(t)=(t-1)^2+2t$

① ارسم مخطط الآلة التي تنتج الأعداد وفق التابع g.

② احسب كلّاً من $g(0)$ و $g(1)$ و $g(-1)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

نسمي t متحولاً صامتاً للتابع أي أنَّ الرّمز المعطى لهذا المتحول غير مهم.

فقد نكتب $g(x)=(x-1)^2+2x$ أو حتى $g(\square)=(\square-1)^2+2\square$.

الآلة (2): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$t \rightarrow \boxed{\boxed{t^2} \rightarrow \boxed{+1}} \rightarrow y$$

تنتج الأعداد ذاتها التي تنتجها **الآلة (1)**.

فإذا رمزنا للتابع الموافق لهذه الآلة بالرمز h ، قلنا إنَّ التابعين g و h متساويان، وكتبنا $h=g$.

① تحقق من أنَّ: $h(-1)=g(-1)$ و $h(2)=g(2)$ و $h(0)=g(0)$.

② أثبت أنَّ $g=h$.

الآلة (3): الآلة المصممة لإنتاج الأعداد وفق:

$$x \rightarrow \boxed{y^2=x} \rightarrow y$$

① علام نحصل إذا أدخلنا العدد 4 ؟

② علام نحصل إذا أدخلنا العدد 9− ؟

③ علام نحصل إذا أدخلنا العدد 0 ؟

④ ما الخلاف بين هذه الآلة والآلات السابقة؟

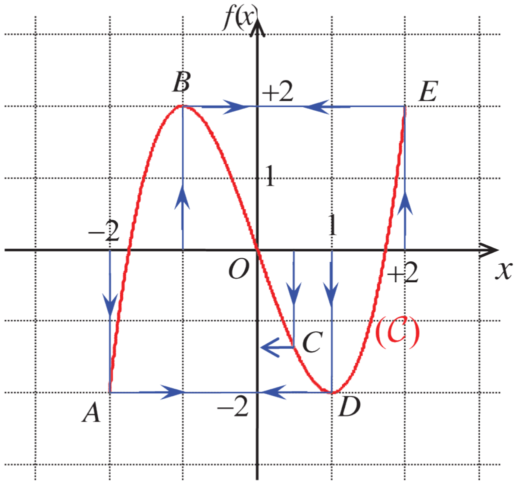
في هذه الحالة الآلة (3) لا تعرف تابعاً، لأنَّ ناتج تلقينها بعدد ليس عدداً وحيداً.

ثمة علاقات تربط بين الأعداد وهي ليست توابع.

تعلّم

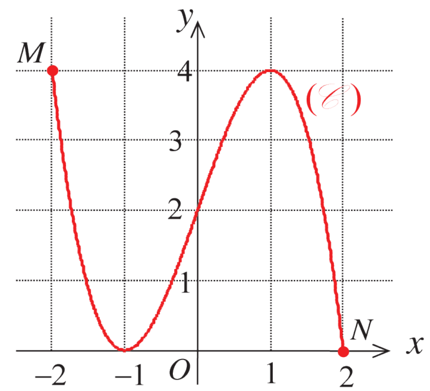
يوجد ثلاث طرائق لتعيين التابع

1- التعيين بخط بياني



- في الشكل المرافق، الخط $(\mathcal{C})$ يُعرِّف تابعاً f يقرن بكل x من المجال $[-2,+2]$ (على محور الفواصل) عدداً واحداً $f(x)$ على محور التراتيب.
- كل نقطة من الخط $(\mathcal{C})$، فاصلتها قيمة للمتحول x وترتيبها هو $f(x)$.
- لاحظ أنّ $f(-2)=-2$ و $f(-1)=2$ و $f(0)=0$
- لا نستطيع في هذه الطريقة الحصول على قيم دقيقة دائماً فنلجأ إلى إعطاء قيم تقريبية للمقدار $f(x)$ فعلى سبيل المثال، فاصلة النقطة C هي $x=0.5$ وترتيبها $y=f(0.5)\approx-1.3$.

مثال



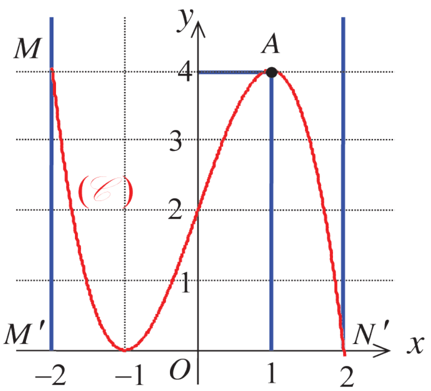
في الشكل المرافق، f هو التابع المعرف بخطه البياني $(\mathscr{C})$ المحدد بالنقطتين M و N.

1. ما مجموعة تعريف f؟

2. ما هي صورة العدد 1؟

3. ما الأعداد التي صورتها 4؟

الحل:



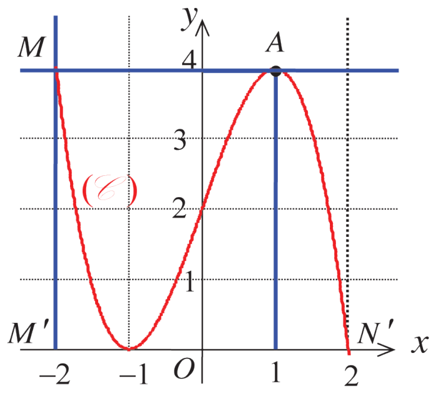
1. لتعيين مجموعة تعريف f، نرسم من M و N، طرفي الخط $(\mathscr{C})$، عمودين على محور الفواصل، فيقطعانه على التوالي في M' و N' (N و N' منطبقتان). فاصلة M' هي -2 وفاصلة N' هي 2. فمجموعة تعريف f هي المجال $[-2,2]$.

2. لإيجاد صورة العدد 1:

① نرفع من النقطة التي فاصلتها 1 على محور الفواصل، عموداً على هذا المحور، فيقطع الخط البياني $(\mathscr{C})$ في نقطةٍ A.

② نسقط من A العمود على محور التراتيب فيقطعه في نقطةٍ ترتيبها 4. فيكون العدد **4** صورة العدد **1**.

نكتب $f(1)=4$.



3. لإيجاد أسلاف العدد 4 .

① من النقطة التي ترتيبها 4 على محور التراتيب، نقيم عموداً على هذا المحور، فيقطع الخط البياني $(\mathscr{C})$ في النقطتين A و M .

② نسقط من A و M العمودين على محور الفواصل فيقطعانه في النقطتين A' (فاصلتها 1) و M' (فاصلتها -2). فثمة سَلَفان للعدد **4**، هما -2 و 1 .

2- التعيين بجدول

الجدول الآتي يعرف تابعاً g يربط بكل عدد من السطر الأول عدداً من السطر الثاني.

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-5	-3	0	5.2	0	7

مثال

الجدول المرافق يعرِّف تابعاً h يقرن طول شجرة صنوبر مقاساً بالمتر بعمرها مقاساً بالسنوات.

العمر	الطول
15	13.5
20	18
25	22.5
30	26
35	29
40	32
45	34
50	36

1. ① انسخ وأكمل: $h(50)=$.

② ما العدد a الذي يحقّق $h(a)=22.5$ ؟

2. مثِّل محتوى هذا الجدول في معلم ديكارتي.

الحل

1. ① نقرأ في الجدول أنَّ طول الشجرة في العمر 50 سنة كان 36 m ،

إذن: $h(50)=36$.

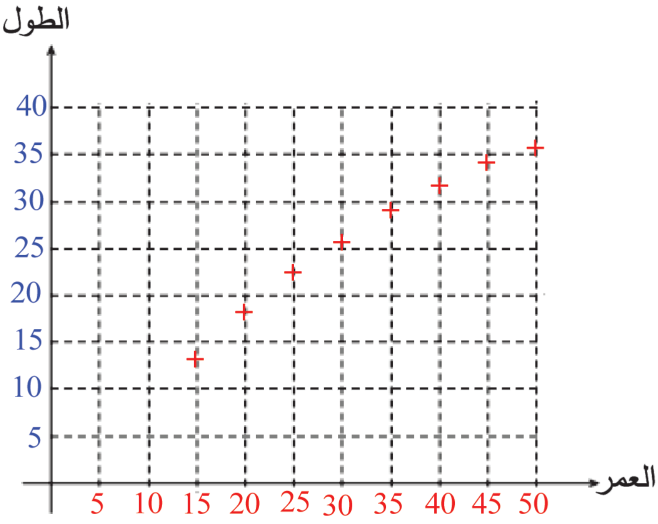
② كما نقرأ أنَّ طول الشجرة كان 22.5 عندما كان عمرها 25 سنة،

إذن: $h(25)=22.5$.

2. تمثيل الجدول في معلمٍ متجانس، يعطي هذا الجدول الطول بدلالة العمر، فالمتحول هو العمر.

على محور الفواصل: نأخذ كل $1\ \text{cm}$ للدلالة على خمس سنوات.

على محور التراتيب: نأخذ كل $1\ \text{cm}$ للدلالة على خمسة أمتار.



3- التعيين بإعطاء الصيغة

h هو التابع المعطى بالصيغة $h : x \mapsto 3(x-1)^2$

هذا يعني أنّه لحساب صورة أي عدد مثل x ، نحسب $3(x-1)^2$. أي نطرح واحداً من x ثمّ نربّع الناتج ثمّ نضرب الناتج الجديد بالعدد 3.

مثلاً: $h(5) = 3(5-1)^2 = 3\times16 = 48$ و $h(0) = 3(0-1)^2 = 3\times1 = 3$ ...... وهكذا.

مثال k هو التابع المعرف بالصيغة $k(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

1. احسب $k\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. عيّن أسلاف العدد 4 أي قيم x التي تحقق $k(x) = 4$.

الحلّ

1. نضع في قاعدة الربط $x = -\frac{1}{2}$:

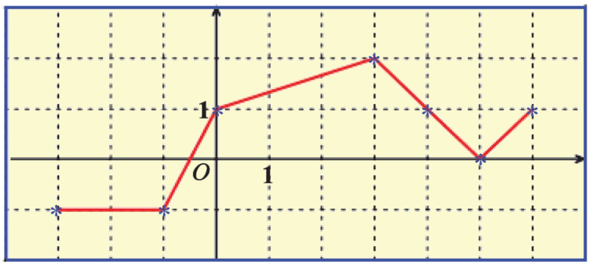
$$k(x) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 4 = \frac{3+10+16}{4} = \frac{29}{4}$$

2. المساواة $k(x)=4$ تعني $3x^2-5x+4=4$.

نطرح 4 من كلٍ من طرفي المعادلة، فنحصل على $3x^2-5x=0$ أو $x(3x-5)=0$، وحسب خاصة الجداء الصفري يكون $x=0$ أو $3x-5=0$، وبجمع 5 إلى طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على $3x=5$، ثم بتقسيم طرفيها على 3 نجد $x=\frac{5}{3}$. وبذلك نكون قد وجدنا قيمتين للمتحول x هما 0 و $\frac{5}{3}$ تحقّقان المساواة $k(x)=4$.

تحقّق من فهمك

① ليكن f التابع المعرف بهذا الخط البياني:



1. ما صورة كلٍّ من 0 و 3 و 5 وفق f؟

2. ما الأعداد التي صورتها 1 وفق f؟

② في إحدى الصحف، أحصينا عدد أسطر المقالات القصيرة وسجلنا النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأسطر	1	2	3	4	5	6	7
عدد المقالات	3	6	24	38	24	15	9

يعرِّف هذا الجدول تابعاً f يقرن بعدد الأسطر عددَ المقالات (مثلاً هناك 6 مقالات كلٌّ منها مؤلف من سطرين)

1. ماذا تعني الكتابة $f(7)=9$ ؟

2. كم عدد المقالات المؤلفة من 4 أسطر؟ عبّر عن ذلك برموز رياضية باستعمال f.

3. وفق التابع f : ① ما صورة العدد 6؟ ② ما الأعداد التي صورتها العدد 24؟

③ الجدول الآتي يمثّل تابعاً g يقرن بكل ارتفاع عن سطح البحر، مقاساً بالمتر، الضغطَ الجوي الموافق مقاساً بالهيكتوباسكال hPa.

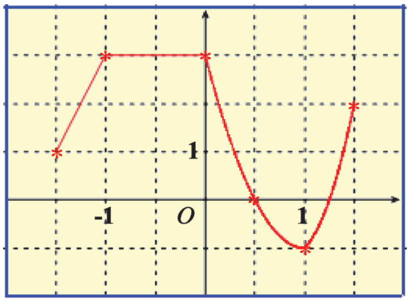
الإرتفاع عن سطح البحر	0	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
الضّغط الجوي	1013	955	899	795	701	616	540	472	411	356

مثّل هذا الجدول بيانياً، متخذاً على محور الفواصل 1 cm لكلّ 1000 m ارتفاعاً عن سطح البحر، وعلى محور التراتيب 1 cm لكلّ 100 hPa.

④ ليكن f التابع المعطى بالصيغة $f(x)=-3(x-1)^2$. جِدْ، وفق هذا التابع، صورة كلٍّ من 0 و 1 و -4.

تدرّب

① هذا الخط البياني يمثّل تابعاً h.



1. أكمل:

① $h(0.5) = \cdots\cdots$ ② $h(-1.5) = \cdots\cdots$

③ $h(0) = \cdots\cdots$ ④ $h(1.5) = \cdots\cdots$

② هذه معلومات عن كبح سيارة على أرض زلقة:

السرعة	مسافة الأمان	مسافة الكبح
50	13.89	16.08
90	25.00	52.08
100	27.78	46.30
130	36.11	108.67

ليكن:

- f التابع الذي يقرن مسافة الأمان (m) بسرعة السيارة (km/h).
- g التابع الذي يربط مسافة الكبح (m) بسرعة السيارة (km/h).

1. أكمل: ① $f(90) = \cdots\cdots$ ② $g(90) = \cdots\cdots$.

2. ليكن k التابع الذي يقرن بكل سرعة مجموع مسافتي الأمان والكبح. نظِّمْ جدولاً بقيم هذا التابع.

③ ليكن h التابع المعطى وفق $t \mapsto -\frac{1}{2}t+5$. احسب صور كلّ من 0 و 2 و $-\frac{4}{3}$ وفق h.

④ ليكن f التابع المعطى وفق $t \mapsto t(t+1)$.

1. انسخ وأكمل $f(t) = \cdots\cdots$.

2. هل صحيح أنَّ:

① 0 هو صورة -1 وفق f؟

② 110 صورة للعدد 11 وفق f؟

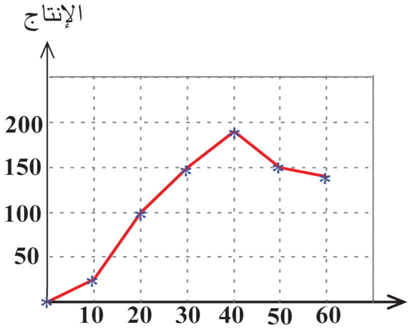
③ صورة العدد 2 هي 5 وفق f؟

④ العدد الذي صورته 0.25 وفق f هو 0.5؟

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة مما يأتي، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) تعلم أنَّ سهول الجزيرة السورية مشهورة بزراعة القمح اعتماداً على المطر وأنَّ غزارة الإنتاج تتعلق بكمية الأمطار السنوية. f هو التابع الذي يقرن بكمية هطول الأمطار السنوية (cm) مقدار إنتاج مساحة $1000\ m^2$ من الأرض المزروعة (kg).



إذا كان الشكل المرافق تمثيلاً لهذا التابع، كان

① $f(40) = 8$ ② $f(40) = 190$ ③ $f(40) = 200$

(2) بالنسبة إلى التابع f في التمرين السابق، الإنتاج الأكبر هو في حالة كمية الهطول

① 60 cm ② 50 cm ③ 40 cm

(3) الجدول الآتي هو جدول قيم تابع h يقرن برقم كل دورة قيمة مكالمات الهاتف الأرضي لأحد المنازل (بالليرة السورية).

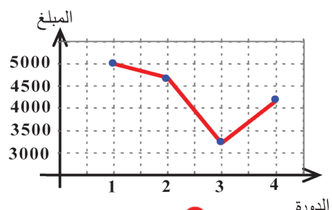
رقم الدورة	1	2	3	4
قيمة المكالمات	5005	3220	4180	4810

وفق هذا التابع، العدد الذي صورته 4 810 هو ① 1 ② 3 ③ 4.

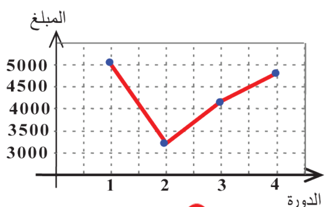
(4) بالنسبة إلى التابع h في التمرين السابق، صورة 3 هي

① 4 810 ② 4 180 ③ 5 005 .

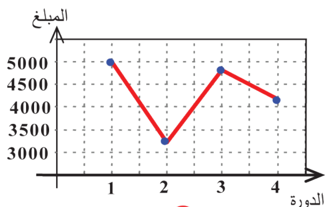
(5) التابع h في التمرين السابق، يُمثَّل بيانياً بالشكل



❶



❷



❸

(6) إذا كان التابع k معرفاً بالقاعدة $x \mapsto (x-2)(x+1)$ ، كان

① $k(-1) = 0$ ② $k(-1) = 6$ ③ $k(-1) = 2$

5

2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) ما صيغة التابع الذي يقرن بكل عدد x مربع مجموع x مع العدد 5 ؟

① $x \mapsto x^2 + 5$

② $x \mapsto (x+5)^2$

③ $x \mapsto (5+x)^2$

(2) h هو التابع المعطى وفق $h(t) = t^2 + t - 6$. أحد أسلاف العدد 0 وفق هذا التابع هو

① 2

② 6

③ -3

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) f هو التابع $x \mapsto (x-3)(x-4)$. صورة -3 وفق هذا التابع هي 42.

(2) إذا كان g التابع $x \mapsto 3(x-3)^2$، كان $g(0) = 3$.

(3) h هو التابع $x \mapsto x^2$. إذن ليس للعدد -3 أسلاف وفق هذا التابع.

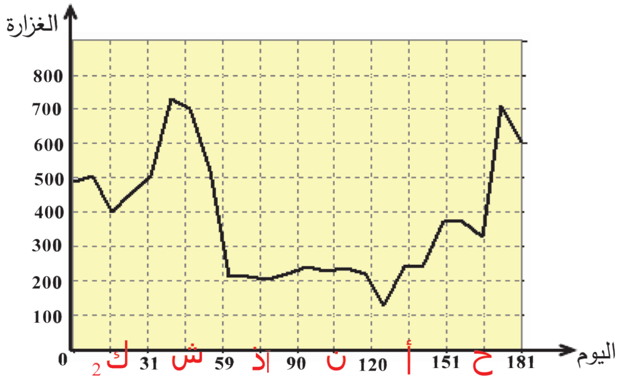
(4) k هو التابع $t \mapsto \frac{1}{t}$ (حيث $t \neq 0$). إذن لا يمكن إيجاد صورة 9 وفق هذا التابع.

(5) u هو التابع $t \mapsto (t-1)^2$. يوجد عددان صورة كل منهما 9 وفق هذا التابع.

(6) v هو التابع الذي يربط بكل عدد موجب جذره التربيعي الموجب. يوجد عددان صورة كل منهما تساوي 1.

(7) نقرن بكل عدد x، عدداً y يحقق $(y-x)(y-2x)(y-3x) = 0$. إذن نعرف بهذه العلاقة تابعاً.

4 الشكل الآتي يمثّل تابعاً f يقرن بأيّام النصف الأوّل من عام 2006 غزارة تدفق مياه نهر الفرات (m^3/s).



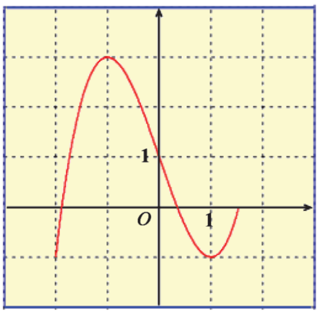
1. بالنسبة إلى هذا التابع:

① ما هو المتحوّل؟

② في أي يوم (بالتقريب) وفي أي شهر كان النهر يتدفّق بأكبر غزارة؟

2. أكمل بالتقريب: ① $f(181) = \cdots\cdots$ ② $f(\cdots\cdots) = 400$.

5 التابع g هو التابع الممثّل بالخط البياني الآتي:



1. ما صورة كلٍّ من 0 و 1؟

2. حدّد أسلاف العدد 0؟ (استعمل قيماً تقريبية عند اللزوم.)

3. ما العدد الذي صورته أكبر ما يمكن؟ وما هذه الصورة؟

4. ما الأعداد التي صورتها أصغر ما يمكن؟ وما هذه الصورة؟

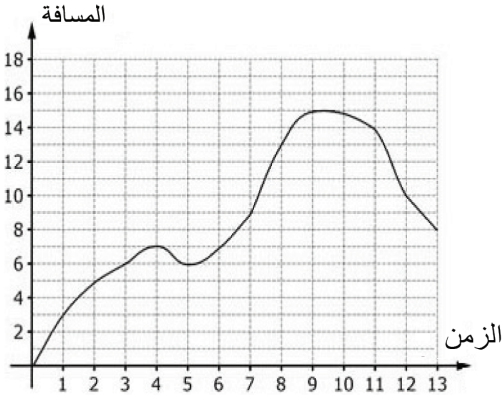
6 الجدول الآتي يعرِّف تابعاً f يربط بكل ساعة من ساعات أحد أيام شهر تموز درجة حرارة الطقس (C°) في مدينة دمشق.

الساعة	12	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	36	37	38	39	38	37	36

1. ماذا تعني الكتابة $f(1) = 37$ و $f(6) = 36$ ؟

2. مثِّل بيانياً هذا التابع.

7 ربط باحث في علم الحيوان جهاز إرسال بفأر ليقرأ المسافة التي تفصل بينه وبين جحره. الخط البياني أدناه يبين المسافة (m) بين الفأر وجحره خلال 13 دقيقة.



نرمز إلى التابع الذي يقرن بكلّ لحظة مسافةَ الفأر عن جحره بالرمز k.

1. نرمز إلى المتحول بالرمز t. علامَ يدل t؟

2. ما أكبر مسافة ابتعدها الفأر عن جحره؟ وفي أيّة دقيقة كان ذلك؟

3. كم كانت مسافة الفأر عن جحره في الدقيقة 13؟

4. انسخ وأكمل:

① $k(3) = \cdots\cdots$ ② $k(5) = \cdots\cdots$ ③ $k(12) = \cdots\cdots$

5. انسخ وأكمل:

① $k(\cdots\cdots) = 3$ ② $k(\cdots\cdots) = 9$ ③ $k(\cdots\cdots) = 10$

6. هل ثمة فترة زمنية كان أثناءها الفأر ينتقل وهو تقريباً على المسافة نفسها من جحره؟ ما هذه الفترة إن كانت موجودة؟

لإحراز تقدم

8 رسم بريد

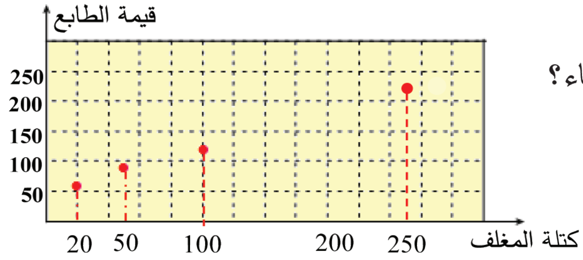
التابع f هو التابع الذي يقرن قيمة الطابع البريدي (بالليرة السورية) بكتلة المغلف المرسل (g).

1. أكمل: ① $f(20) = \cdots\cdots$ ② $f(1000) = \cdots$

2. أكمل: ① $f(\cdots\cdots) = 297$ ② $f(\cdots\cdots) = 593$

وزن المغلف	قيمة الطابع
20	55
50	88
100	133
250	218
500	297
1 000	385
2 000	507
3 000	593

3. الشكل الآتي تمثيل للتابع f وضعه أحد الطلاب لغاية $250\ g$.

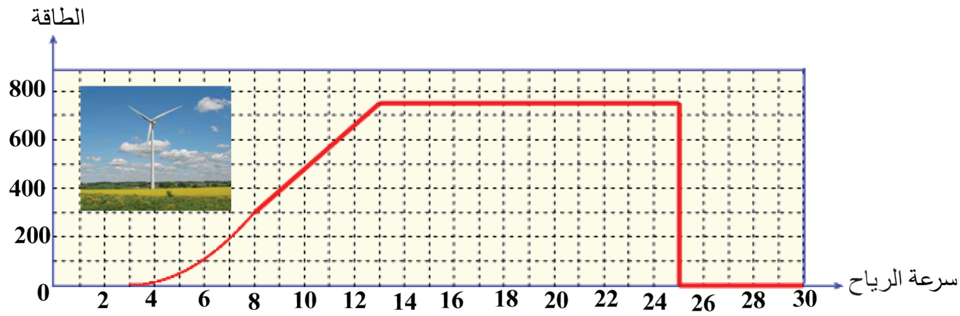


① ما رأيك؟ هل هناك أخطاء؟

② صحِّح كلّ خطأ تجده.

9 تابعٌ أم ليس تابعاً ؟

الشكل الآتي يمثل الاستطاعة التي تولدها عنفة هوائية (بالكيلوواط) حسب سرعة الرياح (m/s)



1. بدءاً من أية سرعة للرياح تبدأ العنفة بتوليد الكهرباء؟

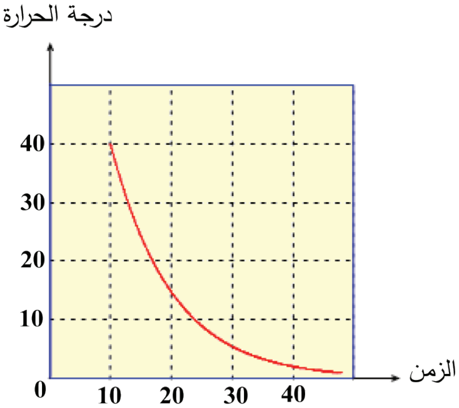
2. ما مقدار الاستطاعة الناتجة عن رياح سرعتها $8\ m/s$ ؟

3. الاستطاعة الأكبر لهذه العنفة هي $750\ kw$. عند أية سرعة للرياح تتولد هذه الاستطاعة ؟

4. ما سرعات الرياح التي عندها تتوقف العنفة عن توليد الطاقة؟

5. تذكَّر تعريف التابع، ثم تأمل الشكل عند سرعة الرياح $25\ m/s$. هل الشكل تمثيل لتابع؟ علِّلْ.

10 تقارب



الشكل المرافق تمثيلٌ لتابعٍ f يربط بكل لحظة زمنية (بالدقيقة) درجة حرارة غرفة تبريد أدوية (C°).

1. في أية لحظة كانت حرارة الغرفة 40 درجة مئوية؟

2. بعد كم دقيقة تقترب درجة حرارة الغرفة من الصفر؟

3. أكمل:

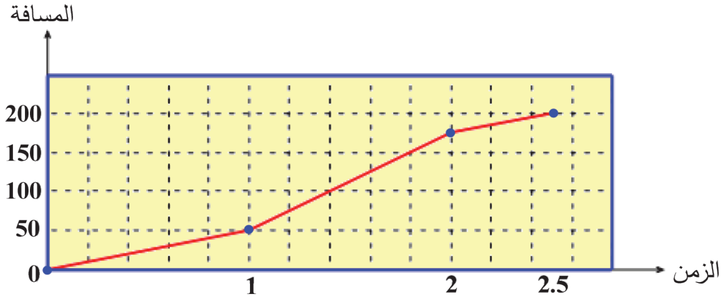
① $f(20) = \cdots\cdots$ ② $f(35) = \cdots\cdots$

4. أكمل:

① $f(\cdots\cdots) = 30$ ② $f(\cdots\cdots) = 2$

11 سائق

استغرق سائق سيارة ساعتين ونصف في قطع مسافة $200\ \text{km}$. الشكل التالي تمثيلٌ لتابع g يقرن بكل لحظة المسافة المقطوعة.



مثِّلْ التابع h الذي يقرن بكلّ لحظة المسافة المتبقية.

12 توقُّع ثم إثبات

f و g تابعان معرَّفان كما يأتي:

$$f(x) = (x-1)(11-x) + 5(x-1)^2$$
$$g(x) = 2(x-1)(2x+3)$$

1. انسخ ثم أكمل الجدول الآتي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

2. ماذا تتوقع؟ عزّز توقعك باختيار قيم أُخرى للمتحول x .

3. أثبت ما توقعت.

6

الوحدة السادسة

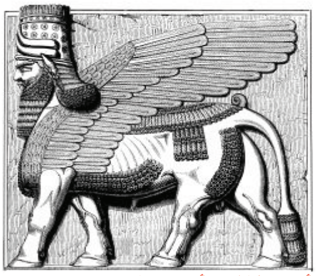
مبادئ الاحتمال والإحصاء

الإحصاء

ما الذي قاد الإحصائيين إلى البدء بتعداد السكان، وإحصاء الموارد المتوفرة في البلدان؟ أهمية الإحصاء في عالمنا الحاضر مُسلمٌّ بها، وهو يُجرى في جميع بلدان العالم لتعداد السكان، ومعرفة العديد من الأشياء حول احتياجاتهم، وما ينتجونه وما يستهلكونه، وهذا ما يفسح المجال للتخطيط، وتطوير الخدمات وتحسينها، ولقد كان هذا هو الحال منذ أن بدأت الفكرة منذ حوالي ستة آلاف سنة!

نعم، الإحصاء أقدم من الأهرامات. ولقد بدأه البابليون حوالي 3800 سنة قبل الميلاد، حيث كان إخضاع البلاد لإحصاء على نحو منتظم يساعد البابليين في اتخاذ القرار بشأن مقدار الغذاء الذي يحتاجه كل فرد، ومن ثَمّ تحديد الغلال والمساحات الواجب زراعتها. ولقد عُثر على سجلات هذه الإحصاءات على رقم فخارية محفوظة حتى يومنا هذا.

ضمّت هذه الرُقُم أعداد الرجال والنساء والأطفال والعبيد والمؤن المخزّنة لديهم ومقادير الزبدة، والحليب والعسل والخضراوات المزروعة في المملكة. هدفهم الأساسي كان تحديد حاجة السكان من الغذاء، وأيضاً إعطاء فكرة عن عدد الرجال القادرين على الخدمة العسكرية، وكم من الضرائب يمكن فرضها.


أجرى البابليون أول إحصاء منذ حوالي 3800 سنة قبل الميلاد

يهدف علم الاحتمال إلى دراسة الظواهر العشوائيّة أو التي تحدث صدفة وإيجاد قوانين لهذه الظواهر، وكثيراً ما يتمّ استنباط قوانين الاحتمال للظواهر الاقتصاديّة أو السكانية أو الطبيعيّة اعتماداً على دراسات إحصائيّة.

يساعد علم الإحصاء أصحاب القرار في اتخاذ القرارات الضروريّة والسليمة والآمنة.

مبادئ الاحتمال والإحصاء

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. حساب تكرار نسبي

ثمة 17 كرة حمراء في علبة تحتوي على 54 كرة. لحساب التكرار النسبي للكرات الحمراء نجري العملية

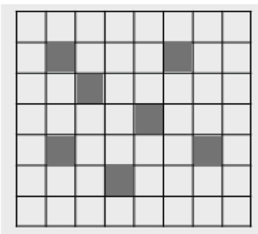
① $54 - 17$ ② $54 + 17$ ③ $17 \div 54$

2. تعرُّف التكرار النسبي المئوي

تشكل الطالبات $\frac{3}{5}$ من طلبة الصف. يمكن التعبير عن هذه النسبة بالصيغة

① 3.5% ② $60\ \%$ ③ 6%

3. إيجاد نسبة



في الرقعة المرسومة جانباً، نسبة الخلايا السوداء تساوي

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$

4. استعمال نسبة مئوية

عدد الطلبة في معهدٍ للغات 450. منهم 60 % يتعلمون اللغة الإنكليزية، فعدد هؤلاء هو

① 75 طالباً ② 180 طالباً ③ 270 طالباً

5. مقارنة كسور عادية

أكبر الكسور $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{8}{15}$ هو

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{8}{15}$

6. عمليات على كسور عادية

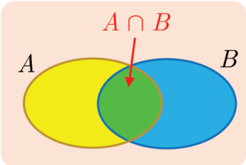
ناتج $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ يساوي

① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{13}{48}$

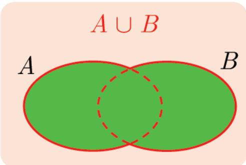
① مفهوم الاحتمال

نشاط1 « بعض العمليات على المجموعات أو الأحداث »

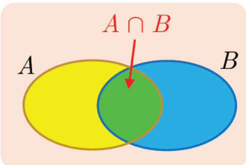
اصطلاحات في العمليات على المجموعات



- مجموعة العناصر المشتركة بين الحدثين «A و B» نرمز لها بالرمز $A \cap B$
ويقرأ الرمز $\cap$ بلغة المجموعات : تقاطع المجموعتين «A و B»
بلغة الأحداث : تقاطع الحدثين «A و B»



- مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين «A و B»
نرمز لها بالرمز $A \cup B$
ويقرأ الرمز $\cup$ بلغة المجموعات : اجتماع المجموعتين «A و B»
وبلغة الأحداث: اجتماع الحدثين «A و B»



- الحدث «A و B» هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدثان A و B في آن معاً. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئيّة $A \cap B$، أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى كل من المجموعتين A و B.
- وعندما لا يكون بين المجموعتين عناصر مشتركة ، نقول إنّ تقاطع الحدثين A و B **هو المجموعة الخالية** $A \cap B = \varnothing$
- أما الحدث «A أو B» فهو الحدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدثين A أو B على الأقل. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئيّة $A \cup B$، أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى أيٍّ من المجموعتين A أو B أو إلى كليهما.
- الحدث المُعاكس A' هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A، أي مجموعة نتائج التجربة التي لا تنتمي إلى المجموعة A.

تطبيق:

نتأمّل المجموعة $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. ليكن A الحدث الموافق للأعداد الزوجيّة في Ω و B الحدث الموافق للأعداد الفرديّة في Ω و C الحدث الموافق لمضاعفات العدد 4 في Ω. والحدث D الموافق للأعداد الأولية في Ω. والحدث E الموافق للأعداد الأولية أو الأعداد الزوجية.

① اكتب أولاً عناصر المجموعات A و B و C و D و E

② اكتب بصيغة القائمة الأحداث الآتية:

$A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A \cap C$ ، $A \cup C$ ، $B \cup C$ ، $B \cap C$ ، A' ، E' ، $D \cap E$

الحل

① الحدث A $\quad A=\{0,\ldots,\ldots,\ldots,8\}$

الحدث B $\quad B=\{\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots\}$

الحدث C $\quad C=\{\ldots,\ldots,\ldots\}$

الحدث D $\quad D=\{\ldots,\ldots,\ldots\}$

الحدث E $\quad E=\{\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots\}$

② بالاستفادة مما سبق نجد:

$A'=B=\{1,3,5,7,9\}$	$A\cap B=\varnothing$
$A\cap C=\{0,4,8\}$	$B\cap C=\varnothing$
$E'=\{\ldots,\ldots\}$	$A\cup B=\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$A\cup C=A=\{0,2,4,6,8\}$	$B\cup C=\{0,1,3,4,5,7,8,9\}$

نشاط2 «الأحداث البسيطة»

1. شعار أم كتابة

نتعامل مع قطعة نقود معدنية دون عيوب، ذات وجهين (كما نعلم) كتابة T وشعار H. نلقي هذه القطعة، كيفياً، على سطح طاولة ملساء ونراقب الوجه الظاهر بعد سقوطها. (شروط التجربة هي أنَّ القطعة تستقر على سطح الطاولة بحيث يظهر أحد وجهيها ويختفي الآخر) أي يظهر T، أو يظهر H. سنكون، بالتأكيد، في مواجهة نتيجتين ممكنتين: شعار أو كتابة.

كتابة شعار

1. بالنسبة إليك، أترى أفضليةً لظهور أحد الوجهين على حساب الآخر؟

2. انسخ وأكمل : حظ الوجه H في الظهور هو .... وحظ الوجه T هو ....

3. نلقي تلك القطعة ست مرات، أترى أننا سنحصل بالتأكيد على ثلاث كتابات؟

4. نفترض أننا ألقينا تلك القطعة أربع مرات وحصلنا في كل مرة على شعار، ثم ألقيناها للمرة الخامسة. ما الصحيح فيما يأتي؟

① نحن أكثر حظاً في الحصول على كتابة.

② نحن أكثر حظاً في الحصول على شعار.

③ للوجهين نفس الحظ في الظهور.

④ لا يمكن الحصول على شعار من جديد.

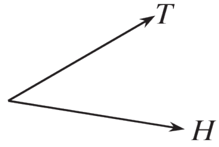
مثل هذه الألعاب نسميها تجارب (أو اختبارات)

مصطلحات:

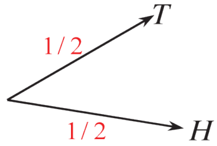
- نقول إنّ تجربةً تجربةٌ عشوائيةٌ إذا كان لها عدّة نتائج ممكنة ولا يُمكن التوثّق من الحصول على أيّة نتيجة منها بشكل مسبق. ففي اختبار قطعة نقود، نقول «نلقي قطعة نقود عشوائياً».
- نسمي النتائج الممكنة للتجربة «أحداثاً بسيطة».
- في اللعبة السابقة، نقول إنَّ احتمال ظهور كلٍّ من الشعار والكتابة يساوي $\frac{1}{2}$، ونكتب:

$\mathbb{P}(H)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(T)=\frac{1}{2}$. (لاحظ $\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(H)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)

- مجموع احتمالات النتائج الممكنة في اختبار عشوائي (أي مجموع احتمالات الأحداث البسيطة) يساوي 1.
- قد نعبر عن التجربة السابقة بالمخطط الآتي والذي نسميه شجرة الاحتمالات:

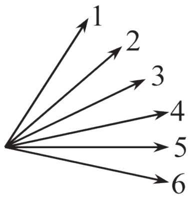


شجرة النتائج الممكنة



شجرة محمّلة بالاحتمالات

2. إلقاء حجر نرد



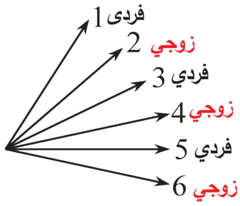
نتأمّل حجر نرد متوازناً، كتبت على أوجهه الستة الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6.

نلقي هذا الحجر كيفياً، ونسمّي نتيجة التجربة رقم الوجه العلوي للنرد.

1. انسخ شجرة الإمكانات (النتائج الممكنة) واكتب الاحتمال على كل فرع.

ما مجموع جميع الاحتمالات؟

2. تهيأت ريم لإلقاء الحجر متمنية الحصول على عدد زوجي.



① ما النتائج (الأحداث البسيطة) التي تُحقّق أمنيتها؟ نسمي هذه الأمنية «الحصول على عدد زوجي» **حدثاً** نرمز إليه بالرمز E.

② حمِّل فروع شجرة الإمكانات بالاحتمالات الموافقة.

3. هي ذي طريقتان لحساب احتمال الحدث E:

☝ «جمعُ الاحتمالات المكتوبة على الفروع المنتهية بأعداد زوجية»

✌ «تقسيم عدد النتائج الزوجية (التي كل منها يحقق أمنية ريم) على عدد النتائج الممكنة»

لا بدّ أنَّ هاتين الطريقتين تؤديان إلى الناتج ذاته. ما هذا الناتج؟ أكمل إذن $\mathbb{P}(E)=\cdots\cdots$

4. ما احتمال كلٍّ من الأحداث الآتية:

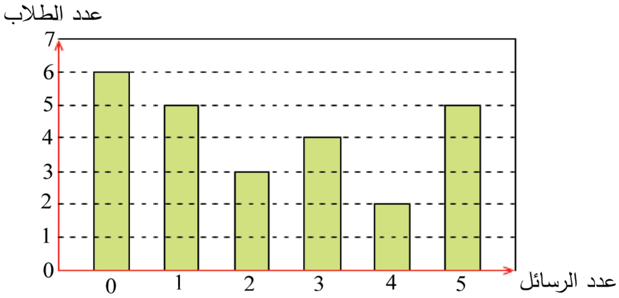
الحدث A : «الحصول على عدد أصغر تماماً من 5»

الحدث B : «الحصول على عددٍ n يحقق $2\le n\le 4$»

الحدث C : «الحصول على عددٍ n يحقق $1\le n\le 6$».

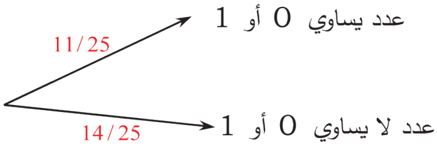
3. رسائل إلكترونية

سجَّل كل طالب من صف يحوي 25 طالباً على ورقة بيضاء عدد الرسائل الإلكترونية التي أرسلها يوم أمس. الشكل المرافق تمثيلٌ للنتائج بالأعمدة. خلطنا تلك الأوراق بعد طيها ووضعناها في كيس وسحبنا إحداها عشوائياً ثم قرأنا العدد المكتوب عليها.



1. ارسم شجرة الإمكانات وحمِّل فروعها بالاحتمالات. ما مجموع هذه الاحتمالات؟

2. E هو الحدث «تحمل الورقة العدد 0 أو 1». لحساب احتمال هذا الحدث، رسم عمار الشجرة المرافقة. كيف تصرف عمار؟ ما احتمال الحدث E؟



3. ما احتمال كلٍ من الأحداث الآتية؟

الحدث A: «تحمل الورقة العدد 4 فأكثر»

الحدث B: «تحمل الورقة العدد 2 فأكثر»

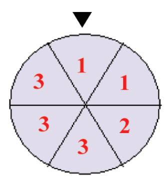
تعلّم

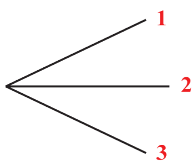
نتائج، وأحداث، وشجرة الإمكانات

- نقول إنَّ تجربةً هي تجربة **احتمالية**، عندما يكون لها عدد من النتائج أو الإمكانات ولا نعرف بدايةً أي تلك النتائج هي التي ستقع.
- تسمى كلّ نتيجة لهذه التجربة **حدثاً بسيطاً**.

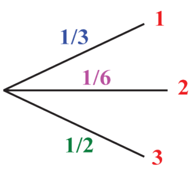
6

مثال ندوِّر الدولاب الممثل بالشكل الآتي ونراقبه حتى يستقر. واضحٌ أنه سيستقر عند أحد أرقام المجموعة $\{1,2,3\}$. هذه الأرقام هي نتائج التجربة أو إمكاناتها.





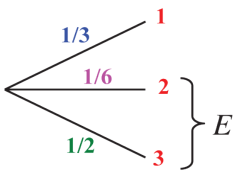
يشغل الرقم 1 قطاعين من قرص الدولاب المقسم إلى ستة قطاعات طبوقة. فحظ استقرار الدولاب عند الرقم 1 هو $\frac{2}{6}$. نسمي هذا العدد احتمال الحدث البسيط «الحصول على



الرقم 1 » ونكتب $\mathbb{P}(1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ويكون بالمثل $\mathbb{P}(2)=\frac{1}{6}$ و $\mathbb{P}(3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. في الشكل المرافق، فروع الشجرة محملة باحتمالات الأحداث البسيطة.

خواصّ

- احتمال حدث بسيط، عددٌ محصور بين الصفر والواحد.
- مجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أيّة تجربة احتمالية يساوي 1.
- تسمى كلُّ مجموعة من نتائج التجربة **حدثاً**.
- احتمال حدثٍ E ونرمز إليه بالرمز $\mathbb{P}(E)$، هو مجموع احتمالات فروع الشجرة التي تؤدي إلى E.



في المثال السابق، ليكن A الحدث «ظهور رقمٍ أكبر أو يساوي 2 » يتحقق هذا الحدث عندما يستقر الدولاب على الرقم 2 أو على الرقم 3.

إذن

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

مصطلحات وخواصّ

- نقول إنَّ حدثاً E قد وقع، إذا أعطت التجربة إحدى النتائج المكوِّنة لهذا الحدث.

في المثال السابق

- يتحقق الحدث B إذا ظهر بنتيجة التجربة الرقم 1 أو الرقم 2، أو الرقم 3.

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(1)+\mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$$

- احتمال أي حدث A عدد محصور بين الصفر والواحد: $0\le\mathbb{P}(A)\le 1$
- الحدث غير القابل للتحقق نسميه **الحدث المستحيل** واحتماله يساوي 0. نرمز إليه بالرمز $\varnothing$، فيكون

$$\mathbb{P}(\varnothing)=0$$

- الحدث الذي لا بدَّ من أن يتحقق نسميه **الحدث الأكيد** واحتماله يساوي 1. نرمز إليه بالرمز Ω، فيكون

$$\mathbb{P}(\Omega)=1$$

في المثال السابق:

- « ظهور رقم محصور بين 4 و 7 » حدث مستحيل.
- « ظهور رقم n يحقق $1\le n\le 3$ » حدث أكيد.

التكرار النسبي والاحتمال

في تجربة احتمالية مكررة عدداً كبيراً من المرات، يكون احتمال حدثٍ قريباً من التكرار النسبي لهذا الحدث.

مثال إذا ألقينا عشوائياً قطعة نقود متجانسة، كان احتمال ظهور الكتابة 0.5. وإذا ألقيناها 1000 مرة، فإنّنا سنحصل على عدد قريب من 500 كتابة (قد لا نحصل بالضرورة على 500 كتابة).

اكتســاب معــارف

كيف نحسب احتمال حدث؟

مثال يحوي كيس 10 كرات متماثلة، رقمت بالأرقام 1,1,1,1, 2, 2, 2,3,3, 4 . نسحب من الكيس عشوائياً كرة ونقرأ رقمها.

1. ارسم شجرة الإمكانات وزوّدِ فروعها باحتمالات النتائج بصيغة كسور عشرية.

2. احسب احتمال الحدث A : « سحب كرة رقمها على الأقل 2 ».

الحل

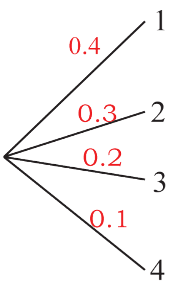
1. النتائج الممكنة لهذه التجربة مع تكرار كلّ منها تجدها في الجدول الآتي:

رقم الكرة	1	2	3	4	المجموع
تكرارها	4	3	2	1	10

احتمالات هذه النتائج هي:

$\mathbb{P}(1) = \frac{4}{10} = 0.4$ ، $\mathbb{P}(2) = \frac{3}{10} = 0.3$ ،

$\mathbb{P}(3) = \frac{2}{10} = 0.2$ ، $\mathbb{P}(4) = \frac{1}{10} = 0.1$.



2. يمكن حساب احتمال الحدث A بالطريقة الآتية:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6 .$$

تحقّق من فهمك

① أي المواقف الآتية هو تجربة احتمالية؟

① الحصول على علامة جيدة في امتحان مادة الرياضيات.

② الحصول على الحذاء الذهبي في أحد دوريات كرة القدم.

③ إلقاء حجر نرد ذي وجهين حمراوين ووجهين زرقاوين ووجهين بيضاوين.

② نلقي حجر نرد متجانس أوجهه الستة مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 .

1. انسخ وأكمل:

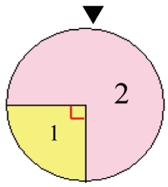
① يوجد .... إمكانية (إمكانيات) من أصل .... إمكانيات للحصول على الرقم 5 .

② يوجد .... إمكانية (إمكانيات) من أصل .... إمكانيات للحصول على رقم فردي.

2. احسب احتمال كلٍ من الحدثين:

A « الحصول على الرقم 5 » و B « الحصول على رقم زوجي »

تدرّب



① ندور هذا الدولاب المتجانس. وبعد أن يستقر، نقرأ الرقم المكتوب في القطاع الدائري الذي يشير إليه المعلم. ارسم شجرة الإمكانات لهذه التجربة وزوِّد فروعها بالاحتمالات.

② ارسم شجرة الإمكانات للعبة إلقاء قطعة نقد متجانسة محمّلاً فروعها باحتمال ظهور الكتابة T والشعار H.

③ تحوي جرة 4 كرات متماثلة، اثنتان حمراوان (R) واثنتان زرقاوان (B). نسحب من الجرة عشوائياً كرةً ونتفقد لونها. ارسم شجرة الإمكانات لهذه اللعبة وزوِّد فروعها بالاحتمالات.

④ نضع في كيس 8 كرات متماثلة كتبت عليها الأرقام 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9. نسحب من الكيس عشوائياً واحدة من تلك الكرات.

1. ارسم شجرة الإمكانات وضع الاحتمالات على فروعها.

2. ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً؟

3. ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً؟

2 أحداث متنافية وأحداث متعاكسة

نشاط «استعمال أحداث متنافية وأحداث متعاكسة»

تحتوي جرة غير شفافة على 15 كرة متماثلة ومرقمة بالأرقام من 1 حتى 15. نسحب كرةً من الجرة ونهتم برقمها.

1. ارسم شجرة الإمكانات محمّلة بالاحتمالات بصيغة كسور.

2. ليكن A الحدث «الحصول على كرة رقمها 2» و B الحدث «الحصول على كرة رقمها أكبر تماماً من 3».

① أيمكن أن يتحقّق هذان الحدثان في آنٍ معاً؟ (نقول إنَّ الحدثين A و B **متنافيان**)

② احسب احتمال «الحصول على كرة رقمها 2 **أو** رقمها أكبر تماماً من 3».

3. ليكن V الحدث « الحصول على كرة رقمها لا يساوي 1». احسب احتمال الحدث V باستعمال كلٍّ من الطريقتين الآتيتين:

☝ جمع الاحتمالات المدوّنة على فروع شجرة الإمكانات.

✌ باستعمال الحدث **المعاكس** الذي نرمز إليه بالرمز V' وهو «الحصول على كرة رقمها 1».

تعلّم

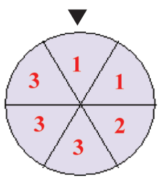
تعريف

نقول إنّ حدثين **متنافيان** إذا استحال تحققهما في آنٍ معاً.

خاصة

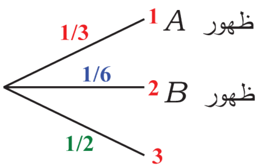
إذا كان A و B حدثين متنافيين، كان احتمال الحدث «A أو B» مساوياً مجموع احتماليهما.

مثال في تجربة الدولاب المرفق، نتأمّل الحدثين:



A « ظهور الرقم 1 »

B « ظهور عدد زوجي »



هذان الحدثان متنافيان. إذن احتمال ظهور 1 أو عدد زوجي يساوي $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

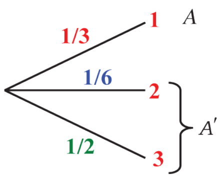
تعريف

الحدث **المعاكس** لحدثٍ A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A. نرمز إليه بالرمز A' ونقول إنَّ A و A' متعاكسان (كلٌّ منهما يعاكس الآخر)

خاصة

مجموع احتمالي حدثين متعاكسين يساوي 1 أي

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') = 1 .$$



مثال في تجربة الدولاب السابقة. إذا كان A الحدث «ظهور الرقم 1 » كان A' الحدث الموافق لظهور رقم مختلف عن الواحد أي «ظهور الرقم 2 أو الرقم 3 »

إذن:

$$\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

بقراءةٍ أخرى، A' هو «ظهور 2 » أو «ظهور 3 »

والحدثان «ظهور 2 » و «ظهور 3 » متنافيان، إذن

$$\mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} .$$

تحقّق من فهمك

نلقي حجر نرد متجانس، أوجهه محمّلة بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6. ونعرِّف الأحداث الآتية:

A : «ظهور عدد أصغر أو يساوي 2 »

B : «ظهور عدد أكبر تماماً من 4 »

1. الحدثان A و B متنافيان. لماذا؟ احسب احتمال A ثم احتمال B.

2. احسب احتمال الحدث E : « ظهور عدد n يحقق $n \leq 2$ أو $n > 4$ »

تدرّب

في اللعبة الواردة في التمرين السابق، نعرِّف الحدثين الآتيين:

I : « ظهور عدد فردي »

J : « ظهور عدد زوجي »

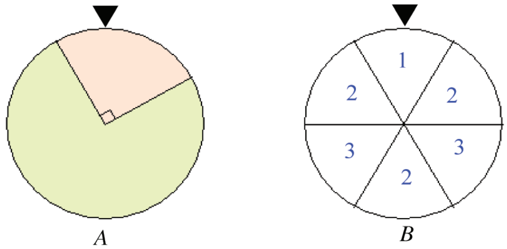
1. الحدثان I و J متعاكسان. لماذا؟ احسب احتمال الحدث I.

2. احسب احتمال الحدث J بطريقتين مختلفتين.

3 تجارب عشوائية مركبة

نشاط « استعمال شجرة الإمكانات »

لدينا دولابان أحدهما A ملوّن والآخر B مرقَّم (تأمل الشكل المرافق)



ندوِّر هذين الدولابين وننتظر حتى يستقرا. سيستقر الدولاب A بحيث نحصل على اللون الأحمر (R) أو على اللون الأخضر (V). وسيستقر الدولاب على الرقم 1 أو على الرقم 2 أو على الرقم 3.

إحدى نتائج هذه التجربة هي على سبيل المثال $(R,1)$ وهي « استقرار الدولاب A على اللون الأحمر واستقرار الدولاب B على الرقم 1 »

1. اكتب لائحة بالنتائج الممكنة.

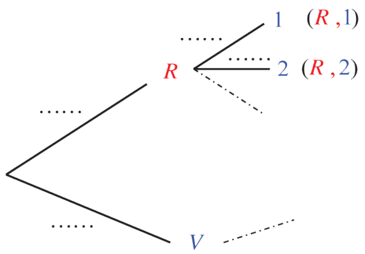
2. انسخ وأكمل شجرة الإمكانات وحمّل فروعها بالاحتمالات.

3. نكرر التجربة 120 مرة.

① ما القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تبدأ بالحرف R؟

② ما القيمة المتوقعة لعدد النتائج التي تنتهي بالرقم 1؟

③ ما التكرار المتوقع للنتيجة $(R,1)$؟



4. نفترض أننا كرّرنا التجربة n مرة.

اشرح لماذا تكرار النتيجة $(R,1)$ هو حوالي $\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times n$ مرة.

نقبل بأنَّ احتمال الحصول على النتيجة $(R,1)$ يساوي جداء ضرب الاحتماليْن $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$.

تعلّم

تسمية

على شجرة الإمكانات لتجربة عشوائية، نسمي فرعين متتاليين **مساراً**.

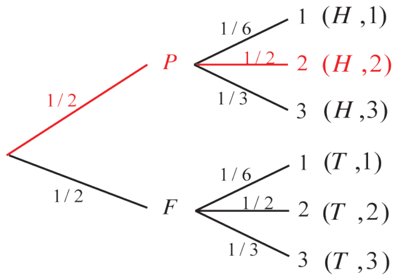
خاصة

على شجرة إمكانات محمّلة بالاحتمالات، احتمال حدث في نهاية أي مسار يساوي جداء ضرب احتمالات المسار.

6

مثال لتكن التجربة: **أولاً** نلقي قطعة نقود متوازنة، **بعدئذ** ندوِّر الدولاب A الوارد في النشاط السابق: وليكن الحدث «ظهور الشعار في التجربة الأولى وظهور 2 في التجربة اللاحقة». نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $(H\,,2)$. واحتماله يساوي الجداء $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

نكتب $\mathbb{P}(H\,,2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.



اكتساب معارف

كيف نحسب احتمال حدث في اختبار مركب من تجربتين ؟

مثال يحوي مغلف خمس بطاقات متماثلة، ثلاث منها زرقاء (B) واثنتان خضراوان (V). نسحب من المغلف عشوائياً بطاقةً، ثم نعيدها إلى المغلف لنسحب منه عشوائياً بطاقةً للمرة الثانية، ونتأمّل لونيّ البطاقتين المسحوبتين.

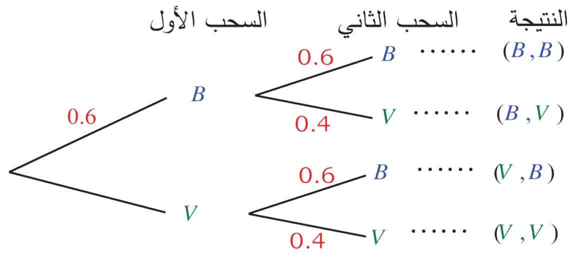
1. ارسم شجرة الإمكانات وزوِّد فروعها باحتمالات النتائج بصيغة كسور عشرية.

2. احسب احتمال الحدث « سحب بطاقتين زرقاوين »

3. احسب احتمال الحدث « سحب بطاقتين من لونٍ واحد »

3. احسب احتمال الحدث « سحب بطاقتين من لونين مختلفين »

الحل



1. $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{5}=0.6$ و $\mathbb{P}(V)=\frac{2}{5}=0.4$. وبهذا نجد شجرة الإمكانات المرافقة مع فروعها المزودة بالاحتمالات.

2. الحدث «سحب بطاقتين زرقاوين» هو الحدث $(B\,,B)$. وكما نعلم $\mathbb{P}(B,B)=\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)=0.6\times0.6=0.36$.

3. الحدث « سحب بطاقتين من لونٍ واحد » هو: «سحب بطاقتين زرقاوين أو سحب بطاقتين خضراوين» أي « (B,B) أو $(V\,,V)$ ». نرمز إلى هذا الحدث بالرمز E، فيكون

$$(*)\cdots\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(B\,,B)+\mathbb{P}(V\,,V)$$

لدينا $\mathbb{P}(B\,,B)=0.36$ و $\mathbb{P}(V\,,V)=\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V)=0.4\times0.4=0.16$.

نعوض في العلاقة $(*)$ فنحصل على $\mathbb{P}(E)=0.36+0.16=0.52$.

4. الحدث «سحب بطاقتين من لونين مختلفين» هو عكس الحدث E إذن $\mathbb{P}(F)=1-\mathbb{P}(E)=1-0.52=0.48$.

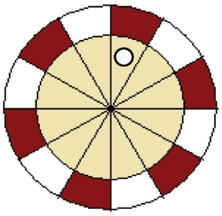
تحقّق من فهمك

يحوي كيس ثلاث كرات حمراء وكرتين خضراوين. وتحوي علبة أربع مكعبات زرقاء وثلاثة صفراء. نسحب عشوائياً كرة من الكيس ونسجل لونها، ثم نسحب عشوائياً مكعباً من العلبة ونسجل لونه.

1. ارسم شجرة الإمكانات ورمِّزْ نتائج التجربة.

2. حمّلْ فروع الشجرة احتمال كل نتيجة.

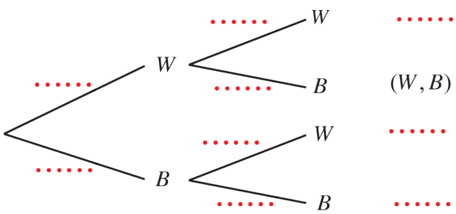
تدرّب



نتأمّل دولاباً دوّاراً قُسّم إلى ست شرائح بيضاء وست شرائح بنية.

وجرّة تحوي ثلاث كرات بيضاء وواحدة بنية.

نسحب عشوائياً كرةً من الجرة ونسجل لونها. ثم نلقي تلك الكرة عشوائياً على الدولاب وننتظر حتى يستقر الدولاب لنسجل لون الشريحة التي استقرت عليها الكرة. على سبيل المثال، يدل الرمز (W,B) على أننا ألقينا كرةً بيضاء فاستقرت على شريحة بنية، بينما يدل الرمز (W,W) على أننا ألقينا كرةً بيضاء فاستقرت على شريحة بيضاء.



1. علام يدل كلّ من الرمزين (B,W) و (B,B)؟

2. انسخ وأكمل شجرة الإمكانات لهذه التجربة، ثم حمِّل كل فرع الاحتمال المناسب.

3. احسب احتمال كلٍ من الحدثين:

- E : «تستقر كرة على شريحة من لونها »
- F : «تستقر كرة على شريحة من غير لونها »

6

4 الربيعات

وسيط عينة ومداها

نرمز لوسيط العينة بالرمز M ونحسبه كما يلي:

نرتّب العيّنة ترتيباً تصاعديّاً أو تنازلياً.

- إذا كان عدد عناصر العينة فردياً $(2n+1)$، كان الوسيط هو تلك المفردة الواقعة في المنتصف أي هي المفردة التي ترتيبها $(n+1)$.
- إذا كان عدد عناصر العينة زوجياً $(2n)$، كان الوسيط متوسّط المفردتين الواقعتين في المنتصف أي نصف مجموع المفردتين اللتين ترتيباهما n و $n+1$.

مثال

لحساب وسيط العيّنة 4 ، 16 ، 5 ، 59 ، 12 ، 13 ، 5 ، 17 ، 7 نرتّبها بالشكل الآتي:

$$4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 12,\ 13,\ 16,\ 17,\ 59$$

عدد مفردات العينة فرديّ $2n+1=9$، إذن $n=\frac{9-1}{2}=4$. ترتيب الوسيط $n+1=5$، فالوسيط هو المفردة الخامسة في العينة المرتبة، إذن $M=12$.

$$\underline{4,\ 5,\ 5,\ 7},\ 12,\ \underline{13,\ 16,\ 17,\ 59}$$

لاحظْ أن العدد 12 يشغل موقع الوسط في سلسلة مفردات العينة بعد ترتيبها.

مثال

لحساب وسيط العينة 6 ,7 ,13 ,14 ,15 ,19، نلاحظ أنها مرتّبة، وعدد مفردات العينة زوجيّ $2n=6$، إذن $n=\frac{6}{2}=3$. المفردة التي ترتيبها $n=3$ هي 13، والمفردة التي ترتيبها $n+1=4$ هي 14، فالوسيط $M=\frac{13+14}{2}=\frac{27}{2}=13.5$.

$$\underline{19,\ 15,\ 14},\ \underline{13,\ 7,\ 6}$$

$$\downarrow$$
$$13.5$$

لاحظ أنَّ الوسيط في هذه الحالة هو المتوسط الحسابي للمفردتين الوسطيتين في العينة المرتبة.

مثال حساب وسيط عينة مفرداتها مكررة.

الجدول التكراري الآتي يمثّل درجات 26 طالباً في مادة الرياضيات (الدرجة العظمى 50):

الدرجة	37	46	40	49	42	43	39	48	41
عدد الطلاب	4	3	4	1	2	5	3	1	3

نرتّب العيّنة فنجد

الدرجة	37	39	40	41	42	43	46	48	49
عدد الطلاب	4	3	4	3	2	5	3	1	1

لمعرفة الوسيط، ننظم الجدول التراكمي التصاعدي:

الدرجة	37	39	40	41	42	43	46	48	49
عدد الطلاب	4	7	11	14	16	21	24	25	26

عدد الطلاب زوجيّ وهو $2n = 26$ طالباً $(n = 13)$. فيجب أن ننظر إلى المفردتين اللتين ترتيبهما 13 و 14. نلاحظ أنّ لهاتين المفردتين القيمة ذاتها وهي 41. نستنتج أنَّ $M = 41$.

6

تعريف

مدى عينة من الأعداد (رمزه E)، هو الفرق بين أكبر مفردات العينة وأصغرها. في المثال السابق $E = 49 - 37 = 12$.

تعلّم

إنّ الوسيط يقسم العيّنة المرتّبة إلى عيّنتين متساويتين بالعدد. إحداهما مفرداتها أصغر أو تساوي الوسيط نسمي وسيط هذه العيّنة الجزئيّة الرُبيع الأوّل للعيّنة الأصليّة ونرمز إليه بالرمز Q_1، والأخرى مفرداتها أكبر أو تساوي الوسيط نسمي وسيط هذه العيّنة الرُبيع الثالث للعيّنة الأصليّة ونرمز إليه بالرمز Q_3. كما نرمز بالرمز Q_2 إلى وسيط العيّنة ونسمّيه أيضاً الرُبيع الثاني. وعلى ذلك فإنّ الربيعات الثلاثة تقسم العيّنة بعد ترتيبها إلى أربعة أجزاء متساوية عدداً.

مثال

جد الرُبيعين الأول Q_1 والثالث Q_3 لكلٍ من العينتين الآتيتين:

① $5, 6, 10, 8, 7, 12, 11, 14$.

② $0, 21, 2, 13, 3, 9, 4, 9, 4, 8, 5, 8, 8, 5$.

الحلّ

① نرتّب العيّنة لنجد 5، 6، 7، 8، 10، 11، 12، 14 وهي عيّنة عدد عناصرها زوجي $2n = 8$ أي $n = 4$ إذن وسيطها هو متوسّط المفردتين الرابعة والخامسة أي $Q_2 = \frac{8+10}{2} = 9$. وهذه القيمة تقسم العيّنة المرتّبة إلى عيّنتين هما (5، 6، 7، 8) و (10، 11، 12، 14) ويكون Q_1 هو وسيط العيّنة الأولى أي $Q_1 = \frac{6+7}{2} = 6.5$، و Q_3 هو وسيط العيّنة الثانية أي $Q_3 = \frac{11+12}{2} = 11.5$.

② نرتّب العيّنة لنجد 0، 2، 3، 4، 4، 5، 5، 8، 8، 8، 9، 9، 13، 21 وهي عيّنة عدد عناصرها زوجي $2n = 14$ أي $n = 7$ إذن وسيطها هو متوسّط المفردتين السابعة والثامنة أي $Q_2 = \frac{8+5}{2} = 6.5$. وهذه القيمة تقسم العيّنة المرتّبة إلى عيّنتين هما $(5, 5, 4, 4, 3, 2, 0)$ و (8، 8، 8، 9، 9، 13، 21) ويكون Q_1 هو وسيط العيّنة الأولى أي $Q_1 = 4$، و Q_3 هو وسيط العيّنة الثانية أي $Q_3 = 9$.

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) حزمة ورق لعب مكون من 32 ورقة موزعة في أربع فئات: قلب ♥، ديناري ♦، سباتي ♣، بستوني ♠ وفي كلّ فئة 8 أوراق: ملك ، بنت ، شاب، 10 ، 9 ، 8 ، 7، 6.
نسحب عشوائياً ورقةً من الحزمة. احتمال الحصول على ورقة حمراء يساوي

① 0.75 ② 0.5 ③ 0.25

(2) في السؤال (1) احتمال الحصول على قلب يساوي

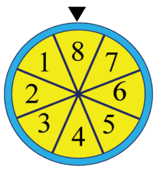
① 0.75 ② 0.5 ③ 0.25

(3) في السؤال (1) احتمال الحصول على ملك يساوي

① 0.0625 ② 0.125 ③ 0.25

(4) في السؤال (1) احتمال الحصول على 7 يساوي

① 0.0625 ② 0.125 ③ 0.25



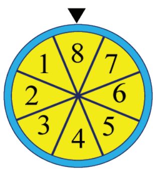
(5) ندوِّر هذا الدولاب ونقرأ الرقم الذي يستقر عنده المعلم. في أيّ الحالات الآتية يكون الحدثان A و B متنافيان ؟

① A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 3$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 2$»

② A: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 2$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 5$»

③ A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 2$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 4$»

2 أشر إلى الإجابات الصحيحة في كل حالة من الحالات الآتية.

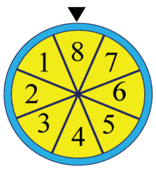


(1) في تجربة الدولاب، في أيّ حالة يكون الحدثان A و B متعاكسين

① A: « ظهور عدد زوجي » و B: « ظهور عدد فردي »

② A: «ظهور عدد n يحقق $n < 4$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n > 5$»

③ A: «ظهور عدد n يحقق $n \le 4$» و B: «ظهور عدد n يحقق $n \ge 5$»



(2) في تجربة الدولاب السابقة، العدد $\frac{1}{2}$ هو احتمال الحدث

① A: «ظهور عدد زوجي »

② B: «ظهور عدد n يحقق $n \le 4$»

③ C: «ظهور عدد n يحقق $n < 4$»

(3) في تجربة رمي قطعتي نقود، العدد $\frac{1}{4}$ هو احتمال النتيجة

① (H, T) ② (H, H) ③ (T, T)

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

① يعبَّر عن احتمال حدث بأي عدد.

② في تجربة عشوائية، مجموع احتمالات نتائج التجربة يساوي 1.

③ في تجربة عشوائية، احتمالات نتائج التجربة متساوية.

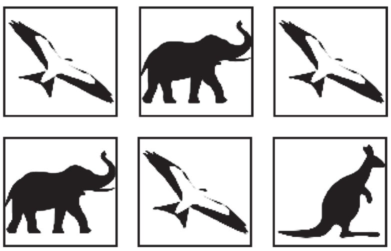
④ في تجربة عشوائية، احتمالات الأحداث المتوقعة متساوية.

⑤ أياً كان عدد المرات التي نلقي بها قطعة نقد متجانسة، سيشكل عدد مرات ظهور الكتابة % 50.

⑥ إذا ألقينا حجر نرد 60 مرة ولم نحصل على الوجه 6، فهذا يعني أن الحجر ليس متجانساً.

⑦ **في خزانة عدنان ثلاثة قمصان (أحمر وأزرق وأسود) وأربعة ربطات عنق (حمراء وزرقاء وسوداء وخضراء). ارتدى عدنان عشوائياً أحد القمصان وإحدى الربطات. احتمال أن يكون قد ارتدى من لون** واحد هو $\frac{1}{6}$.

4 في مغلف 6 بطاقات متماثلة رسم عليها ثلاثة أصناف من الحيوانات كما تجد في الشكل المرافق. نسحب من المغلف عشوائياً واحدة من البطاقات.



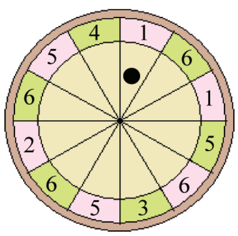
1. قالت ليلى «في المغلف ثلاثة أصناف من الحيوانات، فحظّي في الحصول على فيل هو 1 من 3 ». وأنت، ما رأيك؟

2. ما احتمال الحصول على حيوان أسترالي المنشأ؟

3. ارسم شجرة الإمكانات ووضّع الاحتمالات على فروعها.

4. ما احتمال الحصول على حيوان غير طائر؟

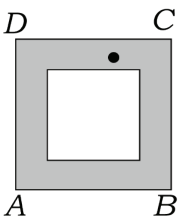
5 نلقي الكرة السوداء عشوائياً على سطح دولاب الروليت لتستقر في أحد القطاعات المرقّمة.



1. ارسم شجرة الإمكانات ووضع الاحتمالات، بصيغة كسور عادية، على فروعها.

2 . إذا أجرينا هذه التجربة 120 مرة، هل سنحصل 40 مرة على الرقم 6؟

3. ما احتمال وقوف الكرة في قطاع ذي رقم زوجي؟



6 $ABCD$ رقعة مربعة الشكل طول ضلعها 5 cm، وعرض المنطقة المظللة منها 1 cm. نرمز إلى مساحة المربع $ABCD$ بالرمز $\mathcal{A}$ وإلى مساحة المنطقة المظللة بالرمز $\mathcal{A}'$. نلقي كرة معدنية قطرها صغير على هذه الرقعة، ونتأمل الحدث E: «تستقر الكرة في المنطقة المظللة». احسب $\mathbb{P}(E)$ علماً بأنَّ $\mathbb{P}(E)=\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

7 أجب ذهنياً عن الأسئلة الآتية:

① تجربة عشوائية لها نتيجتان، احسب احتمال إحدى نتيجتيها علماً بأن احتمال الأخرى هو:

0.75 $\qquad$ 0.4 $\qquad$ $\dfrac{5}{8}$ $\qquad$ $18\ \%$

② تحوي جرة كراتٍ حمراء (R) وكراتٍ خضراء (V) وأخرى بيضاء (B). نعلم أنَّ $\mathbb{P}(R)=\dfrac{3}{8}$ و $\mathbb{P}(V)=\dfrac{1}{4}$. احسب $\mathbb{P}(B)$.

③ احتمال سحب بطاقة حمراء عشوائياً من مغلف هو $\dfrac{3}{5}$. احسب عدد البطاقات الحمراء في المغلف علماً أنّ مجموع ما في المغلف هو: 50 بطاقة $\qquad$ 45 بطاقة $\qquad$ 125 بطاقة

④ في كل حالة، احسب احتمال الحدث المعاكس للحدث A:

$\mathbb{P}(A)=\dfrac{4}{7}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A)=0.25$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A)=1$

لإحراز تقدّم

8 تقييم اختبار

في الجدول المرافق تصحيح اختبارٍ لطارق قوامه 100 سؤال، حيث يدلّ الرمز (T) إلى أنّ الإجابة صحيحة والرمز (F) إلى أنّ الإجابة خطأ:

T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	F	T	T	T	F
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	T	T	F

1. حسب هذا الجدول، أي التأكيدات الآتية هو الأفضل؟

① نصف إجابات طارق خاطئة.

② ثلث إجابات طارق خاطئة.

③ ربع إجابات طارق خاطئة.

④ خُمس إجابات طارق خاطئة.

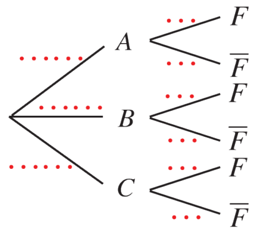
2. أيمكنك القول إنّ طارق لديه دوماً خطأ من أصل كل خمسة أسئلة مطروحة؟ اشرح إجابتك.

3. إذا أخذنا عشوائياً إحدى إجابات طارق، ما احتمال أن تكون هذه الإجابة صحيحة؟

9 من جدول إلى شجرة

في معمل صناعة أسلاك حديدية، تعمل ثلاث آلات A و B و C. يعتبر السلك صالحاً إذا كان طوله محصوراً بين $24.9\ \text{cm}$ و $25.1\ \text{cm}$، وكل سلك مصنوع بطولٍ خارج هذا النطاق هو معيبٌ F فينسَّق.

نقرأ في الجدول الآتي مواصفات 100 سلك أنتجتها الآلات الثلاث:



	الآلة A	الآلة B	الآلة C
الأسلاك الصالحة	23	40	21
الأسلاك المعيبة	5	8	3

نسحب عشوائياً واحداً من هذه الأسلاك.

① ما احتمال أن يكون هذا السلك من إنتاج الآلة A؟ من إنتاج الآلة B؟ من إنتاج الآلة C؟

② ما احتمال أن يكون هذا السلك معيباً؟

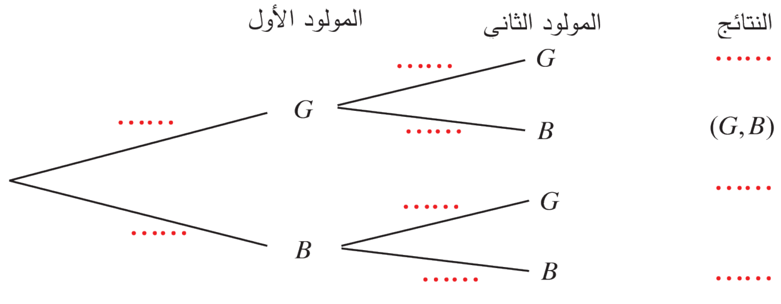
③ ما احتمال أن يكون هذا السلك صالحاً ومن إنتاج الآلة A ؟

④ نعلم أنَّ السلك المسحوب هو من إنتاج الآلة B، ما احتمال أن يكون معيباً؟

⑤ انسخ وأكمل شجرة الإمكانات أعلاه لهذه التجربة وحمِّل فروعها بالاحتمالات.

10 عائلات ذات مولودين

نعتبر جنس المولود بمثابة تجربة ذات نتيجتين، بنت (G) وصبي (B). نعتبر أنَّ احتمال ولادة بنت مساوٍ لاحتمال ولادة صبي. فيما يأتي شجرة الإمكانات لعائلة لديها مولودان:



1. انسخ هذه الشجرة وضِّع على فروعها الاحتمالات المناسبة.

2. احسب احتمال أن يكون مولودا العائلة من جنس واحد.

3. طرقت جرس منزل العائلة ذات المولودين ففتح البابَ صبيٌّ، ما احتمال أن يكون المولود الآخر بنتاً؟ (مع الأخذ بعين الإعتبار ترتيب المولودين).

11 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) وسيط العينة 11، 3، 19، 7، 16، 11، 4، 8، 2 هو

① 16 ② 9 ③ 8

(2) وسيط العينة 3، 11، 9، 12، 8، 17، 5، 13 هو

① 10 ② 11 ③ 12

(3) الرُبيع الأول للعيّنة 8، 9، 12، 17، 19، 23، 25 هو

① 9 ② 12 ③ 15

(4) الرُبيع الثالث للعيّنة 7، 8، 9، 12، 17، 19، 23 هو

① 15 ② 17 ③ 19

12 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.

(1) بين الربيعين الأول والثالث يوجد

① على الأقل 50% من القيم. ② على الأقل % 25 من القيم. ③ على الأقل % 75 من القيم.

(2) سلسلة أعداد مرتبة تصاعدياً. إذا حذفنا أصغر أعداد السلسلة وأكبرها فإنَّ تغيراً يطرأ على

① المتوسط الحسابي ② الوسيط ③ المدى

13 في التمرينات الآتية، أجب إن كان القول صحيحاً أم خطأً، معلّلاً إجابتك.

(1) وسيط أية عينة إحصائية هو أحد مفرداتها.

(2) وسيط أية عينة إحصائية ذات 25 مفردة مرتبة تصاعدياً، هي المفردة التي ترتيبها 13.

(3) الربيع الأول لأية عينة إحصائية هو أصغر تماماً من وسيطها.

(4) إذا كان المتوسط الحسابي لدرجات طلاب أحد الصفوف 11، فهذا يعني أنَّ نصف طلاب هذا الصف درجاتهم أكبر من 11.

(5) بالضبط 50% من مفردات أية عينة إحصائية تقع بين الربيعين الأول والثالث.

14 هذه درجات عدد من طلاب الصف التاسع في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى 15)

6,7,9,9,9,10,12,12,14,15

1. احسب مدى هذه الدرجات.

2. احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

3. ما هي الدرجة الوسيط؟

15 سجَّل عدد من الطلاب عدد الساعات التي يقضونها في تحضير وظائفهم المنزلية أسبوعياً، فكانت النتائج كما يأتي :

$$3,2,4,3,3,5,6,2,10,12,3,1,9,7$$

1. احسب المتوسط الحسابي لهذه الأزمنة.

2. جد وسيط هذه الأزمنة.

3. أكد سهيل « 50 % من الطلاب يقضون أكثر من 5 ساعات في تحضير وظائفهم الأسبوعية ». هل هو محقٌّ؟ لماذا؟

16 في وزارة المواصلات اطلعنا على جدول المسافات عن العاصمة دمشق، وسجلنا مسافات 21 قرية عن دمشق بالكيلومترات:

195,	165,	195,	29,	230,	195,	158
174,	222,	154,	166,	168,	182,	182
216,	157,	210,	197,	163,	53,	143

1. احسب مدى هذه العينة.

2. احسب المتوسط الحسابي لهذه المسافات لأقرب كيلومتر.

3. احسب وسيط هذه المسافات.

17 هاتِ عيّنة:

① مؤلفة من سبعة أعداد وسيطها -3.

② مؤلفة من ستة أعداد وسيطها -3 وعلى الأقل أحدها يساوي -3.

③ مؤلفة من ستة أعداد وسيطها -3 وأيٌّ منها لا يساوي -3.

18 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، هل يمكن إيجاد عينة قوامها تسعة أعداد، مداها 18، بحيث:

① متوسطها الحسابي يساوي الربيع الأول.

② متوسطها الحسابي يساوي الربيع الثالث.