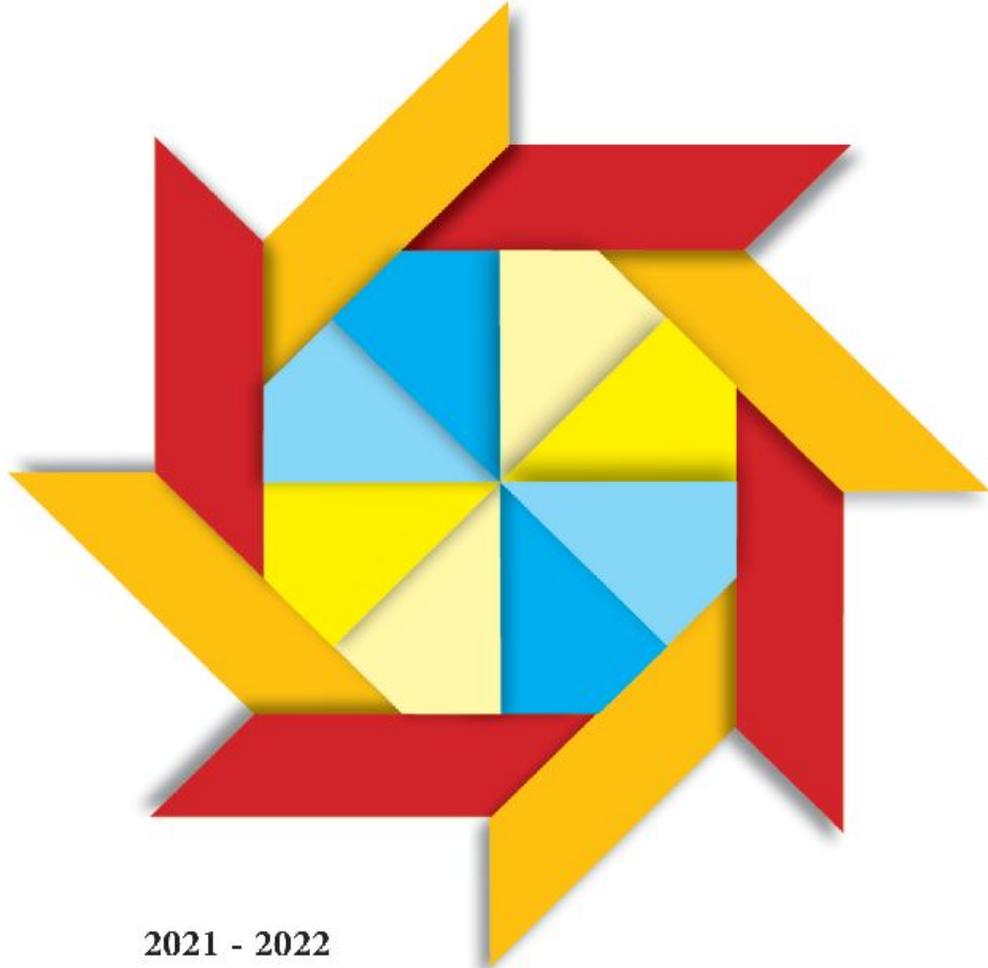




République Arabe d'Egypte  
Ministère de L'Education et  
de L'Enseignement et  
L'Enseignement technique  
Administration centrale des  
affaires de livres



# MATHÉMATIQUES



2021 - 2022

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

**Deuxième préparatoire**

**Deuxième semestre**

Livre de l'élève

## Rédigé par

M. Omar Fouaad Gaballah

Dr. Affaf Aboul Foutouh Saleh

Dr. Essam Wassfy Roufaïl

M. Mahmoud Yasser El Khatib

M. Sirafim Elias Iskandar

## Révisé par

M/Gamal Elshahed

Conseiller pour les mathématiques

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Adel Mohamed Hamza

M. Naser Saad Zaghloul

## بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

### **Cher élève,**

Nous avons le plaisir de te présenter le manuel de mathématiques de deuxième préparatoire. Nous avons tenu à faire de l'apprentissage des mathématiques un travail intéressant et utile, adapté, à la vie pratique et à l'apprentissage des autres matières scolaires afin que tu sentes l'importance de l'étude des mathématiques "sa valeur" et que tu apprécies le rôle des mathématiciens.

Ce manuel propose les activités comme éléments essentiels, et nous avons essayé de proposer le contenu scientifique d'une manière simple pour t'aider à construire tes connaissances mathématiques et à acquérir des méthodes de raisonnements convenables favorisant la créativité.

Ce manuel comporte plusieurs unités et chaque unité plusieurs leçons. Les images et les couleurs sont utilisées pour illustrer les notions mathématiques, les propriétés des figures, en utilisant un langage facile et adapté tenant compte des connaissances acquises. Nous avons également tenu à t'entraîner à découvrir les connaissances visées pour développer ta capacité à l'auto-apprentissage. La calculatrice et l'ordinateur sont utilisés à chaque fois que l'occasion se présente. Chaque leçon comporte des exercices et chaque unité comporte des exercices généraux, des activités concernant le portfolio et une épreuve.

A la fin du manuel, nous proposons des épreuves générales, pour t'aider à réviser la totalité du programme et des indications pour les réponses à certains exercices.

Nous espérons que ce travail sera bénéfique pour toi et pour notre chère Egypte.

**Les auteurs**

# Contents

## Unité (1) : Factorisation

Leçon (1) :	Factorisation d'un trinôme.....	2
Leçon (2) :	Factorisation d'un trinôme carré parfait.....	7
Leçon (3) :	Factorisation d'une différence de deux carrés.....	11
Leçon (4) :	Factorisation d'une somme et d'une différence de deux cubes	13
Leçon (5) :	Factorisation par partition.....	16
Leçon (6) :	Factorisation par complétion d'un carré parfait.....	18
Leçon (7) :	Résolution d'une équation de second degré à une inconnue....	20
	<b>Exercices généraux</b> .....	24
	<b>Activité</b> .....	25
	<b>Epreuve de l'unité</b> .....	26

## Unité (2) : Puissances entières non négatives, puissances négatives dans $\mathbb{R}$ et opérations

Leçon (1) :	Puissances entières non négatives et puissances négatives dans $\mathbb{R}$ ....	28
Leçon (2) :	Règles de calcul avec les puissances entières non négatives dans $\mathbb{R}$ ...	31
Leçon (3) :	Règles de calcul avec les puissances entières négatives dans $\mathbb{R}$ .....	34
Leçon (4) :	Opérations sur les puissances entières négatives dans $\mathbb{R}$ .....	37
	<b>Activité</b> .....	42
	<b>Epreuve de l'unité</b> .....	42

## Unité (3) : Probabilité

Leçon (1) :	Probabilité.....	44
	<b>Exercices généraux</b> .....	50
	<b>Activité</b> .....	52
	<b>Epreuve de l'unité</b> .....	52

## Unité (4) : Aires

Leçon (1) : Parallélogrammes de même aire .....	54
Leçon (2) : Triangles de même aire .....	62
Leçon (3) : Aires de quelques figures géométriques.....	69
Exercices généraux .....	74
Activité .....	75
Epreuve de l'unité.....	76

## Unité (5) : Similitude, Réciproque du théorème de pythagore et théorème d'Euclide

Leçon (1) : Similitude .....	78
Leçon (2) : Réciproque du théorème de Pythagore.....	83
Leçon (3) : Projections.....	85
Leçon (4) : Théorème d'Euclide .....	90
Leçon (5) : Identification d'un triangle selon ses angles.....	93
Exercices généraux .....	95
Activité .....	97
Epreuve de l'unité.....	97
Modèles des examens .....	99

## Symboles mathématiques utilisés

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels	$\perp$	perpendiculaire à
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers	$\parallel$	parallèle à
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels	$\overline{AB}$	le segment $\overline{AB}$
$\mathbb{Q}'$	ensemble des nombres irrationnels	$\overrightarrow{AB}$	la demi-droite $\overrightarrow{AB}$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels	$\leftrightarrow AB$	la droite $\leftrightarrow AB$
$\sqrt{a}$	racine carré de a	$m(\angle L)$	mesure de l'angle L
$\sqrt[3]{a}$	racine cubique de a	$\sim$	semblable à
$[a, b]$	intervalle fermé	$>$	plus grand que
$]a, b[$	intervalle ouvert	$\geq$	plus grand ou égal à
$[a, b[$	intervalle semi-ouvert (fermé)	$<$	plus petit que
$]a, b]$	intervalle semi-fermé (ouvert)	$\leq$	plus petit ou égal à
$[a, +\infty [$	intervalle illimité	$P(A)$	probabilité de l'événement A
$\equiv$	superposition		

## Unité (1)

# Factorisation

$$3x^2 + 7x - 6$$

$$(3x - 2)(x + 3)$$

Four trial factorizations are shown, each with a yellow emoji character above it:

- Trial 1:**  $(3x + 1)(x - 6)$ . Middle term:  $= -17x$ .  $\neq 7x$ .
- Trial 2:**  $(3x - 1)(x + 6)$ . Middle term:  $= 17x$ .  $\neq 7x$ .
- Trial 3:**  $(3x + 2)(x - 3)$ . Middle term:  $= -7x$ .  $\neq 7x$ .
- Trial 4:**  $(3x - 2)(x + 3)$ . Middle term:  $= 7x$ .  $= 7x$ .

# Unité 7

## Leçon 1

# Factorisation d'un trinôme

### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

- ↪ Signification de la factorisation d'une expression algébrique.
- ↪ Factorisation d'un trinôme.

#### Expressions de base :

- ↪ Factorisation.
- ↪ Expression algébrique
- ↪ Un trinôme

Nous avons déjà étudié que :

Factoriser un nombre entier consiste à le mettre sous forme d'un produit de deux ou plusieurs facteurs.

**Par exemple :**

$$12 = 3 \times 4 \quad \text{ou} \quad 12 = -3 \times -4 \quad \text{ou} \quad 12 = 2 \times 6 \quad \text{ou} \quad \dots$$

Nous avons également étudié la factorisation par le plus grand commun diviseur (PGCD).

**Par exemple :**  $6x^2y^2 - 9x^3y = 3x^2y(2y - 3x)$



### Pour s'entraîner

**Factorise par le PGCD :**

1  $2x(m + 3) - 4y(m + 3)$

2  $a(a - b) - b(b - a)$

**On sait que :**  $(x + 3)(x + 4) = x(x + 4) + 3(x + 4)$   
 $= x^2 + 4x + 3x + 3 \times 4$   
 $= x^2 + (4 + 3)x + 12$   
 $= x^2 + 7x + 12$

L'expression  $(x^2 + 7x + 12)$  est un trinôme.

A partir des étapes de la multiplication précédente et en utilisant les propriétés de la multiplication, peux-tu factoriser l'expression  $(x^2 + 7x + 12)$  en deux facteurs ?

1)  $x^2$  se factorise en  $x \times x$

Produit égal à 12	Somme
1 $\times$ 12	13
-1 $\times$ -12	-13
2 $\times$ 6	8
-2 $\times$ -6	-8
3 $\times$ 4	7
-3 $\times$ -4	-7



- 2) On essaie de trouver deux nombres dont le produit est 12 et la somme est 7. Ces deux nombres sont 3 et 4.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$



### Pour s'entraîner

- 1 Trouve deux nombres dont le produit est 20 et la somme est 9.
- 2 Trouve deux nombres dont le produit est 12 et la somme est -8.
- 3 Trouve deux nombres dont le produit est -24 et la somme est 5.
- 4 Trouve deux nombres dont le produit est -15 et la somme est -14.

### (1) Factorisation d'un trinôme de la forme $x^2 + b x + c$

Cette expression se factorise en deux facteurs.

- Le premier terme de chaque facteur est  $x$ .
- Les deux autres termes sont tels que leur produit est  $c$  et leur somme est  $b$ .



### Exemples :

- 1 Factorise l'expression :  $x^2 - 5x + 6$

Solution

On cherche deux nombres dont le produit est 6 et la somme est -5. Ces deux nombres sont -2 et -3.

$$\text{Donc } x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- 2 Factorise l'expression :  $x^2 - 5x - 6$

Solution

On cherche deux nombres dont le produit est -6 et la somme est -5. Ces deux nombres sont 1 et -6.

$$\text{Donc } x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$$

- 3 Factorise l'expression :  $3y^2 - 48 + 18y$

Solution

- 1 Il faut ordonner les termes de l'expression selon les puissances décroissantes de  $y$ . **On obtient l'expression  $3y^2 + 18y - 48$**
- 2 On remarque que 3 est un facteur commun aux différents termes de l'expression. **On obtient l'expression  $3(y^2 + 6y - 16)$**
- 3 On cherche deux nombres dont le produit est -16 et la somme est 6. Ces deux nombres sont -2 et 8. **Donc l'expression =  $3(y - 2)(y + 8)$**



4 Factorise l'expression:  $m^4 - 6m^2n + 5n^2$

**Solution**

- 1  $m^4$  se factorise comme  $m^2 \times m^2$
- 2 On cherche deux nombres dont le produit est  $(5n^2)$  et la somme est  $(-6n)$ . Ces deux nombres sont  $-n$  et  $-5n$ .

**Donc l'expression =  $(m^2 - n)(m^2 - 5n)$**



**Pour s'entraîner**

Factorise chacune des expressions suivantes :

1  $x^2 + 11x + 10$

2  $x^2 - 7x + 10$

3  $x^2 - 3x - 10$

4  $x^2 - 7x + 12$

5  $x^2 + 4x - 12$

6  $x^2 - x - 12$

7  $x^2 - 8x + 12$

8  $y^2 - 20y + 51$

9  $y^2 - 50y - 51$

10  $5x^2 - 10x - 15$

11  $x^4 - 9x^2 + 20$

12  $x^3 - 3x^2 - 28x$

13  $x^2 - 5xy - 24y^2$

14  $b^2 + 3bc - 10c^2$

15  $-x^2 + 2x + 63$

(2) Factorisation d'un trinôme de la forme  $ax^2 + bx + c$ , où  $a \neq \pm 1$

On sait que :

$$(2x - 3)(5x + 4) = \underbrace{10x^2}_{2x \times 5x} + \underbrace{(8x + (-15x))}_{\text{Produit des moyens} + \text{produit des extrêmes}} + \underbrace{(-12)}_{-3 \times 4}$$

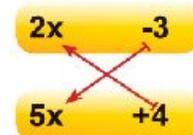
Donc  $(2x - 3)(5x + 4) = 10x^2 - 7x - 12$

Par contre, pour factoriser l'expression  $10x^2 - 7x - 12$ , on fait plusieurs essais pour arriver à factoriser l'expression.

Nous pouvons nous aider de la figure ci-contre.

$$\begin{aligned} \text{Le terme médian} &= (2x)(4) + (-3)(5x) \\ &= -7x \end{aligned}$$

$$\therefore 10x^2 - 7x - 12 = (2x - 3)(5x + 4)$$





**Exemple (1)**

Factorise l'expression  $3x^2 + 7x - 6$

**Solution**

**On remarque que**  $3x^2 = (3x)(x)$  tandis que  $-6$  peut être factorisé en  $1 \times -6$  ou  $-1 \times 6$  ou  $2 \times -3$  ou  $-2 \times 3$ . Nous devons penser aux possibilités suivantes pour arriver à faire la factorisation :



Fig. (1)

Dans la figure (1) :  $3x \times -6 + x \times 1 = -17x \neq$  terme médian.

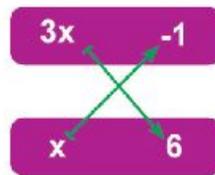


Fig. (2)

Dans la figure (2) :  $3x \times 6 + x \times -1 = 17x \neq$  terme médian.

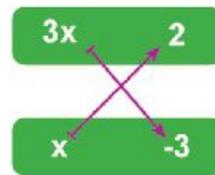


Fig. (3)

Dans la figure (3) :  $3x \times -3 + x \times 2 = -7x \neq$  terme médian.

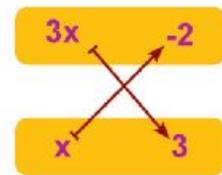


Fig. (4)

Dans la figure (4) :  $3x \times 3 + x \times -2 = 7x =$  terme médian.

$$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = (3x - 2)(x + 3)$$



**Exemple (2)**

Factorise l'expression  $15x^4 - 21z^2 - 6x^2z$

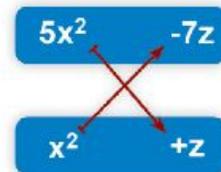
**Solution**

1 L'expression après l'ordre des termes est :  $15x^4 - 6x^2z - 21z^2$ . On remarque l'existence d'un facteur commun.

$$\text{L'expression} = 3(5x^4 - 2x^2z - 7z^2)$$

2 Puisque le troisième terme est négatif, donc les signes des coefficients de ses facteurs sont différents

$$\therefore \text{L'expression} = 3(5x^2 - 7z)(x^2 + z)$$





### Exemple (3)

Factoriser l'expression  $6m^2 + n(2n - 7m)$

**Solution**

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= 6m^2 + 2n^2 - 7nm \\ &= 6m^2 - 7nm + 2n^2 = (2m - n)(3m - 2n) \end{aligned}$$



**Remarque :** Nous pouvons vérifier le résultat trouvé en développant ses facteurs pour retrouver l'expression initiale.

## Exercices (1 - 1)

(A) : **Complète** pour obtenir une factorisation correcte :

- 1  $3x^2 + 7x - 6 = (3x - \dots)(\dots + \dots)$
- 2  $2x^2 + x - 6 = (\dots - \dots)(x + \dots)$
- 3  $5x^2 - 2x - 7 = (5x - \dots)(x + \dots)$
- 4  $6x^2 - 11x - 10 = (2x - \dots)(\dots + 2)$
- 5  $3x^2 + 10x + 8 = (\dots + 4)(x + \dots)$

(B) : **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                                    |                           |                               |
|------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1 $2x^2 + 3x + 1$                  | 2 $2y^2 + 5y + 3$         | 3 $3a^2 + 7a + 2$             |
| 4 $5z^2 - 7z + 2$                  | 5 $6x^2 - 11x + 3$        | 6 $3m^2 - 19m + 6$            |
| 7 $5x^2 - 3x - 2$                  | 8 $3y^2 + 7y - 6$         | 9 $2m^2 - 9m - 5$             |
| 10 $8z^2 + 2z - 3$                 | 11 $5a^2 - 18a + 16$      | 12 $8x^3 - 27x^2 - 20x$       |
| 13 $6x^2 - 47xy - 63y^2$           | 14 $10a^2 + 11ab - 18b^2$ | 15 $3x^2 - 20xy - 7y^2$       |
| 16 $7x^4 + 23x^2y - 30y^2$         | 17 $6a^2 - 19ab - 7b^2$   | 18 $5y^2 - 4x(7y + 3x)$       |
| 19 $18x^5 + 33x^3 - 30x$           | 20 $25m - 10 + 15m^2$     | 22 $a^2b^2 - 24ab^2 + 143b^2$ |
| 21 $21x^2y^2 + 6x^2y^3 - 15x^2y^4$ |                           |                               |

(C) : Soit un rectangle d'aire  $(2x^2 + 19x + 35)$  cm<sup>2</sup>. Trouve ses dimensions en fonction de  $x$ , puis trouve son périmètre pour  $x = 3$ .



## Factorisation d'un trinôme carré parfait

### Réfléchis et discute

Nous avons déjà étudié que :

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(5y + 7x)^2 = 25y^2 + 70xy + 49x^2$$

$$(L^2 - 5m)^2 = L^4 - 10L^2m + 25m^2$$

Chacune des expressions  $4x^2 - 12x + 9$ ,  $25y^2 + 70xy + 49x^2$ ,  $L^4 - 10L^2m + 25m^2$  est un carré parfait.

**On remarque que :**

- 1 Le premier et le dernier terme de chacune de ces expressions sont des carrés parfaits.
- 2 Le terme médian =  $\pm 2 \times$  la racine carré du premier terme  $\times$  la racine carrée du troisième terme.  
Pour factoriser un trinôme carré parfait, on le met sous la forme :

Le trinôme carré parfait =

$$\left( \sqrt{\text{premier terme}} \quad \begin{array}{c} \pm \\ \downarrow \\ \text{signe du terme médian} \end{array} \quad \sqrt{\text{troisième terme}} \right)^2$$

**Exemple**  $9x^2 - 30x + 25 = (\sqrt{9x^2} - \sqrt{25})^2 = (3x - 5)^2$

$$L^4 + 14L^2m + 49m^2 = (\sqrt{L^4} + \sqrt{49m^2})^2 = (L^2 + 7m)^2$$

**Remarque :**

- 1 Cherche le facteur commun à tous les termes de l'expression s'il existe.
- 2 Range les termes de l'expression, selon les puissances d'un symbole, dans l'ordre décroissant.

**À apprendre :**

Factoriser un trinôme carré parfait.

**Expressions de base :**

carré parfait.





### Exemple (1)

Détermine les expressions qui sont des carrés parfaits, puis factorise-les :

A  $25x^2 - 30x + 9$

B  $m^2 + 4m - 4$

C  $49a^2 + 70ab^2 + 25b^4$

#### Solution

A  $25x^2 = (5x)^2$  et  $9 = (3)^2$  **Le premier et le dernier terme de l'expression sont des carrés parfaits.**

$2 \times (5x) \times 3 = 30 =$  le terme médian.

∴ L'expression  $25x^2 - 30x + 9$  est un carré parfait. Donc  $25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2$

B L'expression  $m^2 + 4m - 4$  n'est pas un carré parfait car le troisième terme est négatif.

C Le premier terme =  $49a^2 = (7a)^2$  est un carré parfait.

Le troisième terme =  $25b^4 = (5b^2)^2$  est un carré parfait.

$2 \times 7a \times 5b^2 = 70ab^2 =$  le terme médian

∴ L'expression  $49a^2 + 70ab^2 + 25b^4$  est un carré parfait. Donc l'expression =  $(7a + 5b^2)^2$



### Exemple (2)

Complète pour faire de chaque expression un carré parfait, puis factorise-la :

A  $4y^2 \pm \dots + 121$

B  $25a^2 - 30ab \dots$

#### Solution

A Le terme médian =  $\pm 2 (\sqrt{\text{premier terme}} \times \sqrt{\text{troisième terme}}) = \pm 2 (2y)(11) = \pm 44y$

∴ L'expression =  $4y^2 \pm 44y + 121 = (2y \pm 11)^2$

B  $25a^2 = (5a)^2$

Le terme médian =  $-30ab = 2(5a) \times$  la racine carré du troisième terme

La racine carré du troisième terme =  $\frac{-30ab}{2 \times 5a} = -3b$

Le troisième terme =  $(-3b)^2 = 9b^2$

∴ L'expression =  $25a^2 - 30ab^2 + 9b^2$  et donc  $25a^2 - 30ab^2 + 9b^2 = (5a - 3b)^2$





Pour s'entraîner :

Complète l'expression  $\dots + 12x^2 + 36$  pour avoir un carré parfait, puis factorise-le.



Exemple (3)

Utilise la factorisation pour faciliter le calcul de :  $(7,3)^2 + 2 \times 7,3 \times 2,7 + (2,7)^2$

Solution

Remarque que l'expression donnée est sous la forme d'un trinôme carré parfait. Donc on peut l'écrire sous la forme :  $L'expression = (7,3 + 2,7)^2 = (10)^2 = 100$



Pour s'entraîner :

Utilise la factorisation pour trouver la valeur de :  $(574)^2 - 2 \times 574 \times 573 + (573)^2$



Exemple (4)

Factorise chacune des expressions suivantes :

A  $5x^3 + 50x^2 + 125x$

B  $40a^2b - 50a^4 - 8b^2$

Solution

A En cherchant le P.G.C.D :

$$\therefore L'expression = 5x(x^2 + 10x + 25) = 5x(x + 5)^2$$

B L'expression =  $2(20a^2b - 25a^4 - 4b^2)$

En rangeant les termes selon les puissances décroissantes de a :

$$\begin{aligned} L'expression &= -2(25a^4 - 20a^2b + 4b^2) \\ &= -2(5a^2 - 2b)^2 \end{aligned}$$



## Exercices (1 - 2)

**1**  **Complète** par le terme manquant pour rendre chaque expression un carré parfait :

- |   |                               |                               |
|---|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>A</b> $4x^2 \dots + 1$                         | <b>B</b> $a^2 - 6ab + \dots$  | <b>C</b> $\dots - 18y^2 + 81$ |
| <b>D</b> $\frac{1}{25}x^2 \dots + \frac{1}{4}y^2$ | <b>E</b> $25m^2 + 20mn \dots$ | <b>F</b> $z^4 \dots + 49L^2$  |

**2** **Détermine les expressions qui sont des carrés parfaits, puis factorise-les :**

- |                                |                               |                                   |
|--------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| <b>A</b> $x^2 - 12x + 36$      | <b>B</b> $25x^2 - 15x + 9$    | <b>C</b> $m^2 - 6m - 9$           |
| <b>D</b> $4a^2 + 14ab + 49b^2$ | <b>E</b> $0,01x^2 - 0,2x + 1$ | <b>F</b> $\frac{1}{4}y^2 - y + 4$ |

**3**  **Choisis** la bonne réponse parmi les réponses données :

- A** Si l'expression  $x^2 + 14x + b$  est un carré parfait, alors  $b = \dots$   
(2 ou 7 ou 14 ou 49)
- B** Si  $(x + y)^2 = 64$  et  $xy = 15$ , alors  $x^2 + y^2 = \dots$  (8 ou 34 ou -34 ou 49)
- C** Si  $a^2 + b^2 = 11$  et  $ab = 5$ , alors  $a - b = \dots$  (6a ou  $\pm 1$  ou 1 ou -1)
- D**  $(99)^2 + 2(99) + 1 = \dots$  (100 ou 10000 ou 410 ou  $(98)^2$ )
- E** Si l'expression  $a^2 + 2ab + b^2 = 25$ , alors  $a + b = \dots$   
(5 ou -5 ou  $\pm 5$  ou 12,5)
- F** Si l'expression  $x^2 + kx + 25$  est un carré parfait, alors  $k = \dots$   
(5 ou 10 ou  $\pm 10$  ou  $\pm 5$ )

**4**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <b>A</b> $m^2 - 2m + 1$     | <b>B</b> $9x^2 + 12x + 4$   | <b>C</b> $36 - 60k + 25k^2$ |
| <b>D</b> $4x^2 - 4xy + y^2$ | <b>E</b> $9a^2 + 6ab + b^2$ | <b>F</b> $25b^2 - 10b + 1$  |

**5**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                                |                                |                                   |
|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| <b>A</b> $18y^2 - 12y + 2$     | <b>B</b> $24x + 24x^2 + 6x^3$  | <b>C</b> $6a^4 - 12a^2b^2 + 6b^4$ |
| <b>D</b> $4b^2c + bc^2 + 4b^3$ | <b>E</b> $3z + 42z^4 + 147z^7$ | <b>F</b> $20ay^2 - 60ay + 45a$    |

**6**  **Utilise** la factorisation pour faciliter le calcul de :

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| <b>A</b> $(20,7)^2 - 1,4 \times 20,7 + (0,7)^2$ | <b>B</b> $(997)^2 + 6 \times 997 + 9$ |
|---|---------------------------------------|



# Factorisation d'une différence de deux carrés

Unité 7

Leçon  
3

## Réfléchis et discute

Nous avons déjà étudié que :

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

L'expression  $x^2 - y^2$  est appelée « une différence de deux carrés ».

Une différence des carrés de deux quantités = la somme des deux quantités × leur différence

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$



### Exemple (1)

Factorise chacune des expressions suivantes :

A  $49x^2 - 25$

B  $(2y - 3)^2 - 1$

C  $27m^3 - 48mn^6$

D  $(x + y)^2 - (x - y)^2$

### Solution

A  $49x^2 - 25 = (7x + 5)(7x - 5)$

B  $(2y - 3)^2 - 1 = [(2y - 3) + 1][(2y - 3) - 1]$   
 $= (2y - 2)(2y - 4)$   
 $= 2(y - 1) \times 2(y - 2) = 4(y - 1)(y - 2)$

C  $27m^3 - 48mn^6 = 3m(9m^2 - 16n^6)$   
 $= 3m(3m + 4n^3)(3m - 4n^3)$

D  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = [(x + y) + (x - y)][(x + y) - (x - y)]$   
 $= 2x \times 2y$   
 $= 4xy$

### À apprendre :

↳ Factorisation d'une différence de deux carrés.

### Expression de base :

↳ différence de deux carrés





## Exemples

2 Utilise la factorisation pour faciliter le calcul de :

A  $(763)^2 - (237)^2$

B  $(999)^2 - 1$

Solution

A l'expression =  $(763 + 237)(763 - 237) = 1000 \times 526 = 526000$

B l'expression =  $(999 + 1)(999 - 1) = 1000 \times 998 = 998000$

3 Factorise l'expression  $81x^4 - 16y^4$ .

Solution

$$\begin{aligned} 81x^4 - 16y^4 &= (9x^2 + 4y^2)(9x^2 - 4y^2) \\ &= (9x^2 + 4y^2)(3x + 2y)(3x - 2y) \end{aligned}$$

## Exercices (1-3)

1  Factorise chacune des expressions suivantes si cela est possible :

A  $x^2 - 4$

B  $9 - y^2$

C  $-9x^2 + 25$

D  $8x^2 - 50$

E  $a^2 - b^2 c^4$

F  $225x^2 - y^2$

G  $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$

H  $9(m - 1)^2 - 25(m + 1)^2$

I  $x^{100} - 1$

2  Utilise la factorisation pour calculer :

A  $(77)^2 - (23)^2$

B  $(8,27)^2 - (1,23)^2$

C  $31 \times 29$

D la longueur de l'un des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sachant que la longueur de l'autre côté est 40 cm et la longueur de l'hypoténuse est 41 cm.

3 Si  $x^2 - y^2 = 20$  et  $x + y = 10$ , trouve la valeur de  $x - y$ .

4 Si  $l - m = 9$  et  $l + m = 15$ , trouve la valeur de  $l^2 - m^2$ .

5 Si  $4x^2 - y^2 = -32$  et  $2x + y = 8$ , trouve la valeur de  $y - 2x$ .

6  Factorise chacune des expressions suivantes :

A  $(x + y + 5)^2 - (x - y - 5)^2$

B  $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$



# Factorisation d'une somme et d'une différence de deux cubes

Unité 7

Leçon 4

## Réfléchis et discute

### Factorisation d'une somme de deux cubes :

L'enseignant demande à l'élève :

Peut-on factoriser :  $x^3 + y^3$  ?

L'élève réfléchit, puis il répond :

J'estime que l'un des deux facteurs est  $(x + y)$ .

L'enseignant dit : Peut-on calculer l'autre facteur de  $x^3 + y^3$  ?

L'élève répond : Pour calculer l'autre facteur de  $(x^3 + y^3)$  on effectue la division  $(x^3 + y^3) \div (x + y)$  en utilisant la méthode de la division de deux expressions déjà étudiées . Le quotient de la division est  $x^2 - x y + y^2$

L'expression  $x^3 + y^3$  est appelée **somme de deux cubes**. Elle est factorisée de la manière suivante :

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - x y + y^2)$$

**Exemple :**

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27 &= (2x)^3 + (3)^3 = (2x + 3) [(2x)^2 - 2x \times 3 + (3)^2] \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

### Factorisation d'une différence de deux cubes :

L'expression  $x^3 - y^3$  est appelée **différence de deux cubes**. Nous pouvons trouver sa formule comme suit :

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= x^3 + (-y)^3 \\ &= (x + (-y)) [x^2 - x(-y) + (-y)^2] \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + x y + y^2)$$

### À apprendre :

- ↳ Factorisation d'une somme de deux cubes.
- ↳ Factorisation d'une différence de deux cubes.

### Expressions de base :

- ↳ somme de deux cubes
- ↳ différence de deux cubes

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} x^3 \phantom{+ y^3} \\ -x^3 + x^2y \phantom{+ y^3} \\ \hline -x^2y \phantom{+ y^3} \\ +x^2y + x y^2 \phantom{+ y^3} \\ \hline x y^2 \phantom{+ y^3} \\ -x y^2 + y^3 \phantom{+ y^3} \\ \hline y^3 \phantom{+ y^3} \\ -y^3 \phantom{+ y^3} \\ \hline 00 \phantom{+ y^3} \\ 00 \phantom{+ y^3} \end{array} \quad \begin{array}{l} + y^3 \\ x + y \\ x^2 - x y + y^2 \end{array} \end{array}$$



**Par exemple :**  $125 a^3 - b^6 = (5a)^3 - (b^2)^3$   
 $= (5a - b^2)(25a^2 + 5 ab^2 + b^4)$



**Exemples :**

**1** Factorise chacune des expressions suivantes :

**A**  $x^3 + 343y^3$

**B**  $40a^3 + 135 b^3$

**C**  $(x + z)^3 - x^3$

**D**  $x^6 - 64 y^6$

**Solution**

**A**  $x^3 + 343 y^3 = (x)^3 + (7y)^3$   
 $= (x + 7y)(x^2 - 7 xy + 49 y^2)$

**B**  $40 a^3 + 135 b^3 = 5 (8a^3 + 27 b^3) = 5 [(2a)^3 + (3 b)^3]$   
 $= 5 (2a + 3b) (4 a^2 - 6 ab + 9 b^2)$

**C**  $(x + z)^3 - x^3 = [(x + z) - x][(x + z)^2 + x(x + z) + x^2]$   
 $= z (x^2 + 2 xz + z^2 + x^2 + xz + x^2)$   
 $= z (3x^2 + 3 xz + z^2)$

**D**  $x^6 - 64 y^6$

**On remarque que :** cette expression peut être factorisée comme différence de deux carrés comme elle peut être factorisée comme différence de deux cubes. Dans ce cas, il faut commencer d'abord par la factoriser comme différence de deux carrés :

$$x^6 - 64y^6 = (x^3 + 8y^3)(x^3 - 8y^3)$$

$$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4 y^2)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4 y^2)$$

**2** Si  $x^2 - y^2 = 20$ ,  $x - y = 2$  et  $x^2 - xy + y^2 = 28$ , trouve la valeur de  $x^3 + y^3$ .

**Solution**

$$x^2 - y^2 = 20 \quad \therefore (x - y)(x + y) = 20$$

$$x - y = 2 \quad \therefore 2(x + y) = 20 \quad \therefore x + y = 10$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= 10 \times 28 = 280$$



## Exercices (1 - 4)

1  **Complète** pour obtenir des phrases correctes :

A  $\sqrt[3]{8x^3} = \dots\dots\dots$

B  $\sqrt[3]{-125 a^6} = \dots\dots\dots$

C  $27 m^3 = (\dots\dots\dots)^3$

D  $343 x^3 y^6 = (\dots\dots\dots)^3$

E  $x^3 - 1 = (x - 1) (\dots\dots\dots)$

F  $8a^3 + 125 = (\dots + \dots) (4a^2 - 10a + \dots)$

2  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

A  $x^3 + 8$

B  $m^3 + 64 n^3$

C  $x^3 - 729$

D  $8 - 1000 b^6$

E  $x^{12} + y^{15}$

F  $\frac{1}{8} a^3 - 8 b^3$

3  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

A  $512 x^3 - y^3$

B  $343 + 27 m^3$

C  $16 a^3 b + 686 b^4$

D  $5 x^4 - 40x$

E  $(x + 5)^3 - 125$

F  $(m - 2 n)^3 - 8 n^3$

4  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

A  $(x + 5)^3 + (x - 5)^3$

B  $(x + y)^3 - (x - y)^3$

C  $(m - n) + (m - n)^4$

D  $x^6 - 7x^3 - 8$

E  $0,027 m^3 - n^3$

F  $a^6 - 625 b^6$

5 Si  $x^3 - y^3 = 28$  et  $x - y = 2$ , trouve la valeur de  $x^2 + x y + y^2$



# Unité 7

## Leçon 5

# Factorisation par partition

### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

↗ La factorisation par partition .

#### Expressions de base :

↗ factorisation par partition

Pour factoriser une expression algébrique composée de plus de trois termes comme

$$2ax + ay + 2bx + by$$

on remarque qu'il n'y a pas de facteur commun entre tous les termes et que cette expression n'est pas dans l'une des formes déjà étudiées. Par conséquent, on essaie de partager l'expression en groupes de termes ayant dans chaque groupe un facteur commun.

L'expression =  $2ax + ay + 2bx + by$  L'expression est partagée en deux groupes

$$= a(2x + y) + b(2x + y) \text{ On a cherché le facteur commun de chaque groupe}$$

$$= (2x + y)(a + b), (2x + y) \text{ est un facteur commun des deux groupes}$$

#### Remarque que :

Nous pouvons effectuer la partition d'une autre façon comme suit :

$$\text{L'expression} = 2ax + 2bx + ay + by \text{ Propriété de la commutativité}$$
$$= 2x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(2x + y)$$



#### Exemple

Factorise chacune des expressions suivantes :

**A**  $x^3 + 2x^2 - x - 2$

**B**  $16x^2 - a^2 + 6ab - 9b^2$

**C**  $1 - x^2 - 4xy - 4y^2$

#### Solution

**A** L'expression =  $x^3 + 2x^2 + (-x - 2) = x^2(x + 2) - (x + 2)$



$$= (x + 2)(x^2 - 1)$$

$$= (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

- B** On remarque qu'il n'y a pas de relation entre le premier terme et les autres termes. Dans ce cas, nous pouvons partager les termes de l'expression comme suit :

$$= 16x^2 - (a^2 - 6ab + 9b^2)$$

$$= 16x^2 - (a - 3b)^2$$

$$= [4x + (a - 3b)][4x - (a - 3b)] = (4x + a - 3b)(4x - a + 3b)$$

- C** L'expression  $= (1 - (x^2 + 4xy + 4y^2))$   
 $= 1 - (x + 2y)^2$   
 $= (1 - x - 2y)(1 + x + 2y)$

## Exercices (1 - 5)

- 1**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                              |                                 |
|------------------------------|---------------------------------|
| <b>A</b> $ax + bx + ay + by$ | <b>B</b> $5L - 10m - aL + 2am$  |
| <b>C</b> $am - an + m - n$   | <b>D</b> $a^3 + a^2 + a + 1$    |
| <b>E</b> $xy + 5y + 7x + 35$ | <b>F</b> $x^3 - 3x^2 + 6x - 18$ |

- 2**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| <b>A</b> $3xy - 5zL + 5zx - 3yL$   | <b>B</b> $8mn - 2m^2 + 12nL - 3mL$ |
| <b>C</b> $ab + 6mn - 2bm - 3an$    | <b>D</b> $3ax - a - 6bx + 2b$      |
| <b>E</b> $2x^2y - xy^2 + 2ax - ay$ | <b>F</b> $abx^2 + bx - ax - 1$     |

- 3**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| <b>A</b> $x^2 - 2xz - 2xy + 4yz$     | <b>B</b> $4a^2 + 2ab + b^2 - x^2$  |
| <b>C</b> $a^2 + 6ab + 9b^2 - m^2$    | <b>D</b> $9x^2 - 4a^2 + y^2 + 6xy$ |
| <b>E</b> $121x^4 - 100x^2 - 20x - 1$ | <b>F</b> $4m^4 - 9m^2 + 6m - 1$    |



Factorisation par  
complétion d'un carré  
parfait

## Réfléchis et discute

## Il apprendre :

- La Factorisation par complétion d'un carré parfait.

## Expressions de base :

- carré parfait.

Nous avons déjà étudié que :

**un carré parfait est de la forme  $a^2 \pm 2 a b + b^2$ .** Sa factorisation est de la forme  $(a \pm b)^2$ .

Certaines expressions ne sont pas sous la forme d'un carré parfait, mais on peut les compléter pour qu'elles le soient.



## Exemple 1

Factorise l'expression :  $x^4 + 4y^4$

## Solution

Cette expression ne peut pas être factorisée par l'une des méthodes déjà étudiées. Pour obtenir un carré parfait, il faut lui ajouter le terme  $2 \times \sqrt{x^4} \times \sqrt{4y^4} = 4x^2y^2$

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= [(x^2 + 2y^2) - 2xy][(x^2 + 2y^2) + 2xy] \\ &= (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) \end{aligned}$$



## Exemple 2

Factorise l'expression :  $9a^4 - 13a^2b^2 + 4b^4$

## Solution

L'expression =  $(3a^2)^2 - 13a^2b^2 + (2b^2)^2$ . Pour que l'expression soit un carré parfait, il faut que :

$$\text{le terme médian} = \pm 2 \times 3a^2 \times 2b^2 = \pm 12a^2b^2$$



$$\begin{aligned}
 \text{L'expression} &= (3a^2)^2 - 12 a^2b^2 + (2b^2)^2 - a^2b^2 \\
 &= (3a^2 - 2b^2)^2 - a^2b^2 \\
 &= (3a^2 - 2b^2 - ab)(3 a^2 - 2b^2 + ab) \\
 &= (3a^2 - ab - 2 b^2)(3 a^2 + ab - 2 b^2) \\
 &= (3a + 2b) (a - b)(3a - 2 b) (a+ b)
 \end{aligned}$$

#### Autre solution

On remarque que l'expression  $9a^4 - 13a^2b^2 + 4b^4$  peut être factorisée comme un trinôme.

$$\begin{aligned}
 \text{L'expression} &= (9a^2 - 4b^2)(a^2 - b^2) \\
 &= (3a + 2b)(3a - 2b)(a + b)(a - b)
 \end{aligned}$$

**En utilisant la propriété de la commutativité, on retrouve le même résultat précédemment obtenu.**

## Exercices (1-6)

**1**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

**A**  $4x^4 + y^4$

**B**  $64 m^4 + n^4$

**C**  $4x^4 + 625 y^4$

**D**  $81 x^4 + 4 z^4$

**E**  $a^4 + 2500 b^4$

**F**  $8x^4y^2 + 162 z^4y^2$

**2**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

**A**  $x^4 + x^2 y^2 + 25 y^4$

**B**  $a^4 + 4 a^2 b^2 + 16 b^4$

**C**  $m^4 - 11 m^2 n^2 + n^4$

**D**  $x^4 + 9x^2 + 81$

**E**  $16x^4 - 28 x^2 y^2 + 9 y^4$

**F**  $4x^4 + 25 y^4 - 29 x^2 y^2$

**3**  **Factorise** chacune des expressions suivantes :

**A**  $4x^2 (4x^2 - 7y^2) + y^4$

**B**  $x^2 (x^2 - 19y^2) + 25 y^4$

**C**  $3m^4 + 3 n^4 - 54 m^2 n^2$

**D**  $4a^2 (a^2 - 6 b^2) + 9 b^4$

**E**  $9 x^4 - 25 x^2 + 16$

**F**  $x^8 - 16 y^8$



# Unité 7

## Leçon 7

# Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

↪ La résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

#### Expressions de base :

↪ équation du second degré à une inconnue

↪ racines d'une équation

↪ résolution d'une équation

Nous avons déjà étudié que :

Si **a** et **b** sont deux nombres réels et si  **$a \times b = \text{zéro}$** , alors :  
 **$a = \text{zéro}$**  ou  **$b = \text{zéro}$**

**Par exemple**, si  $(x - 5)(x + 2) = 0$

alors :  **$x - 5 = 0$**  ou  **$x + 2 = 0$**

$\therefore$   **$x = 5$**  ou  **$x = -2$**

#### Remarque que :

- 1  $x = 5$  et  $x = -2$  sont appelées les racines de l'équation  $(x - 5)(x + 2) = 0$
- 2 L'ensemble solution de l'équation est  $\{ 5, -2 \}$



#### Exemple 1

Trouve l'ensemble solution de l'équation  $2x^2 - 5x - 3 = 0$

#### Solution

En factorisant le membre de gauche, l'équation sera de la forme :

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

$$2x = -1 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$\therefore$  L'ensemble solution est  $\{-\frac{1}{2}, 3\}$



### Remarque que :

Nous pouvons vérifier le résultat en remplaçant  $x$  par chacune des valeurs trouvées dans l'équation initiale :

$$\begin{aligned}\text{Pour } x = -\frac{1}{2}, \text{ le membre de gauche} &= 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \\ &= 2 \times \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 3 = 3 - 3 = 0 = \text{Le membre de droite}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pour } x = 3, \text{ le membre de gauche} &= 2 (3)^2 - 5 (3) - 3 \\ &= 18 - 15 - 3 = 0 = \text{Le membre de droite}\end{aligned}$$

∴ les valeurs  $-\frac{1}{2}$  et 3 vérifient l'équation.



### Exemple 2

Résous, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $2x^3 = 18x$

#### Solution

On écrit l'équation sous la forme  $2x^3 - 18x = 0$ , puis on la factorise.

$$2x(x^2 - 9) = 0 \quad \text{ou} \quad 2x(x-3)(x+3) = 0$$

$$\therefore 2x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

∴ L'ensemble solution =  $\{0, 3, -3\}$ . Vérifie les solutions trouvées.



### Exemple 3

Trouve le nombre réel dont le double dépasse l'inverse de 1.

#### Solution

Soit le nombre =  $x$  ( $x \neq 0$ )

Le double du nombre =  $2x$

L'inverse du nombre =  $\frac{1}{x}$

∴ le double du nombre dépasse son inverse de 1

$$\therefore 2x - \frac{1}{x} = 1$$



En multipliant les deux membres de l'équation par  $x$ ,

$$2x^2 - 1 = x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 1) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 1$$

**Vérification :**

Le double du nombre = -1

L'inverse du nombre = -2

**Vérification :**

Le double du nombre = 2

L'inverse du nombre = 1

**Il est clair dans les deux solutions que le double du nombre dépasse son inverse de 1.**



#### Exemple 4

Dans un rectangle, la longueur dépasse la largeur de 4 cm. Si l'aire du rectangle est  $21 \text{ cm}^2$ , trouve les dimensions du rectangle.

**Solution**

Soit la largeur du rectangle =  $x \text{ cm}$

$\therefore$  la longueur =  $(x + 4) \text{ cm}$

$$\therefore x(x + 4) = 21$$

$$\therefore x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\therefore (x - 3)(x + 7) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ ou } x + 7 = 0$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -7 \text{ (solution refusée car c'est un nombre négatif)}$$

$\therefore$  La largeur du rectangle = 3 cm et la longueur du rectangle =  $3 + 4 = 7 \text{ cm}$ .

**Vérification :** L'aire du rectangle =  $3 \times 7 = 21 \text{ cm}^2$



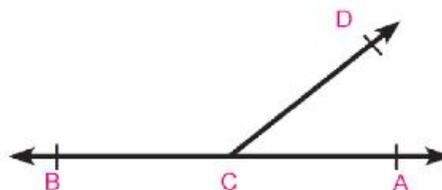
## Exercices (1 - 7)

- 1**  Trouve, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :
- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>A</b> $x^2 - 8x + 15 = 0$  | <b>B</b> $x^2 - 7x - 30 = 0$  |
| <b>C</b> $6x^2 - 7x - 3 = 0$  | <b>D</b> $5x^2 + 12x = 44$    |
| <b>E</b> $(x - 3)(x + 1) = 5$ | <b>F</b> $(x + 3)^2 - 49 = 0$ |
- 2**  Trouve, dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :
- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| <b>A</b> $12x^2 = 47x - 45$              | <b>B</b> $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ |
| <b>C</b> $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 10 = 0$ | <b>D</b> $x^2 - 6x = 0$       |
| <b>E</b> $4x^3 = 9x$                     | <b>F</b> $6x^2 - x = 22$      |
- 3** Deux nombres réels sont tels que l'un dépasse l'autre de 4. Si leur produit est 45, trouve les deux nombres.
- 4** La longueur d'un terrain rectangulaire dépasse sa largeur de cinq mètres. Si l'aire du terrain est 500 mètres carrés, trouve ses dimensions.
- 5** Soit ABC un triangle tel que  $m(\angle A) = (x^2 + 61)^\circ$ ,  $m(\angle B) = (110 - 11x)^\circ$ ,  $m(\angle C) = (90 - 7x)^\circ$ . Trouve la valeur de  $x$ , puis calcule les mesures des angles du triangle.
- 6** L'âge de Hatem dépasse l'âge de Hanane de 4 ans et la somme des carrés de leurs âges est 26. Trouve leurs âges.
- 7** Soit un triangle rectangle de longueurs des côtés  $2x$ ,  $2x + 1$  et  $x - 11$  centimètres. Trouve la valeur de  $x$ , puis calcule le périmètre du triangle et son aire.
- 8** Un nombre réel dépasse son inverse de  $\frac{5}{6}$ . Quel est ce nombre ?
- 9** Si on ajoute un nombre réel à son carré, le résultat est 12. Quel est ce nombre ?
- 10** Deux nombres impairs consécutifs sont tels que la somme de leurs carrés est 130. Quels sont ces deux nombres ?



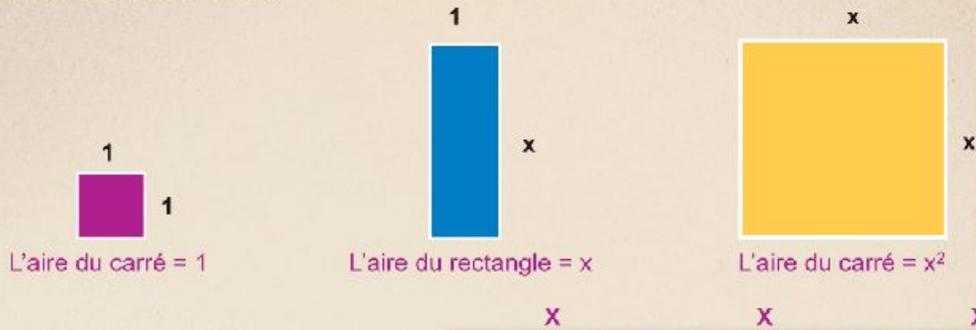
## Exercices généraux

- 1  **Factorise** chacune des expressions suivantes :
- |                 |                  |                           |
|-----------------|------------------|---------------------------|
| A $x^4 - 16y^4$ | B $2x^5 + 54x^2$ | C $a^4 + 4b^4$            |
| D $x^6 - 64y^6$ | E $8x^3 - 125$   | F $3x^3 + 2x^2 + 12x + 8$ |
- 2  **Factorise** chacune des expressions suivantes :
- |                                      |                         |
|--------------------------------------|-------------------------|
| A $8x^2 - 2xy - y^2$                 | B $L^3m - 27m^4$        |
| C $625a^2 - 81b^2$                   | D $2(x + 3y)^3 - 250$   |
| E $(c - d) + 2x(c - d) + x^2(c - d)$ | F $7x^2 - 29xy + 30y^2$ |
- 3  **Trouve** une valeur du nombre  $c$  où  $c \in \mathbb{Z}$ , pour que l'expression donnée soit factorisable, puis factorise-la :
- |                   |                   |                    |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| A $x^2 + cx - 15$ | B $x^2 - 7x + c$  | C $y^2 - cy + 29$  |
| D $a^2 + a - c$   | E $cx^2 + x - 15$ | F $cx^2 - 13x + 6$ |
- 4  **Factorise** chacune des expressions suivantes :
- |                               |                                   |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| A $9x^2 - 30x + 25$           | B $18ab^4 - 114b^2c^2a + 128ac^2$ |
| C $x^2 - 4xy + x - 2y + 4y^2$ | D $x^2 - 2xy + y^2 - 4z^2$        |
- 5  **Trouve** l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :
- |                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| A $x^2 + x = 6$       | B $3x^2 + 2x = 85$ |
| C $(x - 1)^2 + x = 3$ | D $2x^3 = 7x$      |
- 6 La somme de trois nombres entiers consécutifs est égale au carré de leur nombre médian. Trouve ces trois nombres.
- 7 Dans la figure ci-contre  $\overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{AB} = \{C\}$   
 $m(\angle BCD) = (x^2)^\circ$ . Si  $m(\angle ACD) = (8x)^\circ$ ,  
 trouve la valeur de  $x$ .



## Activité

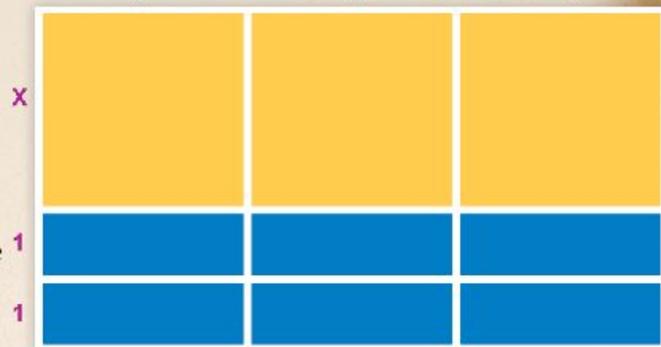
Nous pouvons utiliser les unités suivantes pour illustrer quelques problèmes de factorisation comme suit



- 1 La figure ci-contre a pour aire  $3x^2 + 6x$

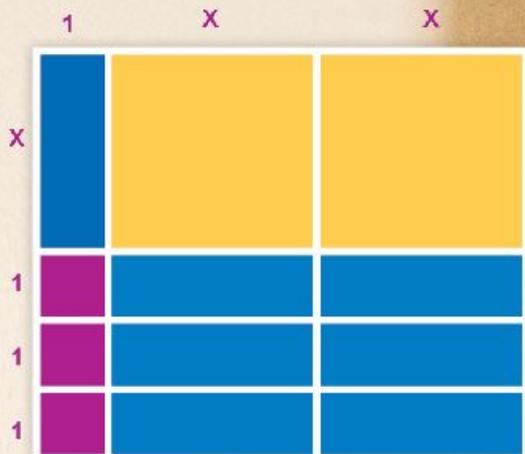
**Remarque que :**

Les deux dimensions du rectangle sont  $3x$  et  $x + 2$   
 Son aire =  $3x(x + 2)$   
 =  $3x^2 + 6x$



- 2 L'aire de la figure ci-contre = .....  
 Les deux dimensions du rectangle sont .....  
 Quelle est la relation entre l'aire du rectangle et ses dimensions ?

- 3 Trace un rectangle ayant pour aire  $3x^2 + 7x + 2$ .



## Epreuve de l'unité

1 Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :

- A L'expression  $4x^2 + k + 25y^2$  est un carré parfait pour  $k = \dots\dots$   
(20 ou  $10xy$  ou  $\pm 20xy$  ou  $30xy$ )
- B Si  $x^2 - y^2 = 16$  et  $x + y = 8$ , alors  $x - y = \dots\dots$  (2 ou 1 ou 128 ou 64)
- C Si  $x + y = 3$  et  $x^2 - xy + y^2 = 5$ , alors  $x^3 + y^3 = \dots\dots$  (15 ou 25 ou 8 ou 7)
- D L'expression  $4x^2 + 12x + a$  est un carré parfait pour  $a = \dots$  (6 ou 16 ou 1 ou 9)
- E Si  $(2a - 5)(3a - 2) = 6a^2 + ka + 10$ , alors  $k = \dots\dots$  (15 ou 19 ou -19 ou 4)

2 Complète pour obtenir des phrases correctes :

- A  $(4a - 5b)(\dots\dots - 3b) = 8a^2 \dots\dots + 15b^2$
- B Si  $x^2 + y^2 = 17$  et  $xy = 7$ , alors  $(x - y)^2 = \dots\dots$
- C Si l'expression  $kx^2 - 10x + 1$ , est un carré parfait, alors  $k = \dots\dots$
- D Si  $(x + 1)$  est l'un des facteurs de l'expression  $5x^2 - 2x - 7$ , alors l'autre facteur est  $\dots\dots$
- E  $x^3 + 8 = (x + 2)(\dots\dots\dots)$

3 Factorise chacune des expressions suivantes :

- A  $(x + 2)^3 - 4x - 8$
- B  $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
- C  $2x^2 - 5x + 3$
- D  $x^4 + 4L^4$
- E  $8x^3 - 343y^6$

4 Résous, dans  $\mathbb{R}$ , chacune des équations suivantes :

- A  $x^2 - 3x - 10 = 0$
- B  $3x^2 + x = 14$
- C  $(2x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 10$

5 Utilise la factorisation pour faciliter le calcul de :

- A  $\frac{20}{7} \times 75 - \frac{20}{7} \times 5$
- B  $(8,175)^2 - (1,825)^2$
- C  $(87)^2 + 2 \times 13 \times 87 + (13)^2$

6 Les longueurs des deux côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle sont  $4x$  et  $x + 1$  centimètres. Si son aire est  $84 \text{ cm}^2$ , trouve la longueur de son hypoténuse.



## Unité (2)

# 2

# Puissances entières non négatives et puissances négatives dans $\mathbb{R}$

**Leçon 1 :** Puissances entières non négatives et puissances négatives dans  $\mathbb{R}$ .

**Leçon 2 :** Règles de calcul avec les puissances entières non négatives dans  $\mathbb{R}$ .

**Leçon 3 :** Règles de calcul avec les puissances entières négatives dans  $\mathbb{R}$ .

**Leçon 4 :** Opérations sur les puissances entières négatives dans  $\mathbb{R}$ .



# Unité 2

## Leçon 1

### Puissances entières non négatives et puissances négatives dans $\mathbb{R}$

#### Réfléchis et discute

#### A apprendre

- ☆ la notion de puissances entières non négatives et puissances négatives.

#### Expressions de base

- ☆  $\mathbb{R}^*$  l'ensemble des nombres réels privé de zéro
- ☆ Puissances non négatives dans  $\mathbb{R}$
- ☆ Puissances négatives dans  $\mathbb{R}$
- ☆ équation exponentielle dans  $\mathbb{R}$

#### (1) Puissances entières non négatives :

Nous avons déjà étudié les puissances entières dans l'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  :

Complète :

1  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\dots\dots\dots)^{\dots}$

2  $\frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = (\dots\dots\dots)^{\dots}$

Si  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ , alors  $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$

où  $a$  est répété  $n$  fois



#### Exemples :

1  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ .

2  $-\sqrt{2} \times -\sqrt{2} \times -\sqrt{2} \times -\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^4 = 4$

3  $-\sqrt{5} \times -\sqrt{5} \times -\sqrt{5} = (-\sqrt{5})^3 = -5\sqrt{5}$

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ , alors  $a^0 = 1$

Par exemple :  $(\sqrt{7})^0 = 1$  ,  $(\frac{-1}{\sqrt{11}})^0 = 1$

#### (2) Puissances entières négatives :

#### Réfléchis et discute

On sait que  $5^3 \times 5^{-3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$

Complète :

$x^m \times \dots = 1$  où  $x \neq 0$  ,  $m \neq 0$



Si  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{Z}^+$

alors  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  et  $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Par exemple :  $(\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{9}$  ,  $\frac{1}{(-\sqrt{3})^{-3}} = (-\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3}$



**Pour s'entraîner**

Si  $x = 3$  ,  $y = \sqrt{2}$ , trouve sous la forme la plus simple la valeur de :

1  $x^{-2} y^{-4}$

2  $(x^{-2} \times y^4)^{-2}$

3  $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$



**Exemples :**

1 Si  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$  , trouve la valeur de :  $x^2 + (x z)^2 \times y^2$

**Solution**

L'expression =  $x^2 + x^2 z^2 y^2 = x^2 (1 + z^2 y^2)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = \frac{3}{4} \times \left[1 + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{4} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{8}$$

**Règle importante :**

Si  $a^m = a^n$ , alors  $m = n$  pour tout  $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

Par exemple : Si  $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$  alors  $(\sqrt{2})^x = (\sqrt{2})^3$   $\therefore x = 3$

Si  $a^n = b^n$ , alors  $a = b$  pour tout  $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$

et  $|a| = |b|$  pour tout  $n \in \{2, 4, 6, \dots\}$

Par exemple :  $x^5 = \frac{1}{32}$  alors  $x^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$   $\therefore x = \frac{1}{2}$

2 Trouve dans  $\mathbb{R}$  l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

A  $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \frac{125}{27}$

B  $(3)^{x-3} = (\sqrt{3})^{x+5}$



### Solution

A  $(\frac{3}{5})^{x+2} = \frac{125}{27}$   
 $\therefore x + 2 = -3$

$\therefore (\frac{3}{5})^{x+2} = (\frac{5}{3})^3$   
 $\therefore x = -2 - 3$

$\therefore (\frac{3}{5})^{x+2} = (\frac{3}{5})^{-3}$   
 $\therefore x = -5$

Donc l'ensemble-solution est  $\{-5\}$

B  $\therefore [(\sqrt{3})^2]^{(x-3)} = (\sqrt{3})^{(x+5)}$   
 $\therefore 2x - 6 = x + 5$

$\therefore (\sqrt{3})^{2x-6} = (\sqrt{3})^{x+5}$   
 $\therefore x = 11$

L'ensemble-solution est  $\{11\}$



Pour s'entraîner

### Calcul mental

Résous mentalement l'équation  $\frac{1}{(x+9)^4} = 0,0001$ . Que remarques-tu ?

## Exercices (2 - 1)

[ 1 ] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

- 1  $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$  est égal à : A  $4^3$  B  $4^4$  C  $4^{12}$  D  $4^81$   
2  $0,002 \times 0,05$  est égal à : A  $10^{-5}$  B  $10^{-4}$  C  $10^4$  D  $10^5$   
3 Si  $x = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$ , alors  $x^{-1}$  est égal à : A  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  B  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  C  $\sqrt{3}$  D 2  
4 Si  $5^x = 4$ , alors  $5^{x-1}$  est égal à : A 1,25 B 0,8 C 0,125 D 0,08  
5 Si  $(x-5)^0 = 1$ , alors  $x \in \dots\dots\dots$  A  $\mathbb{R} - \{5\}$  B  $\mathbb{R} - \{-5\}$  C  $\{5\}$  D  $\mathbb{R}$

[ 2 ] Mets ce qui suit sous la forme la plus simple :

- 1  $3^{-1}$  2  $(\frac{1}{4})^{-1}$  3  $(\frac{3}{2})^{-3}$   
4  $(\sqrt{5})^4$  5  $(-\sqrt{3})^{-2}$  6  $(\sqrt[3]{7})^{-3}$   
7  $(\frac{-1}{\sqrt{2}})^6$  8  $(0,01)^{-2}$  9  $(\frac{-\sqrt{2}}{2})^{-4}$

[ 3 ]

1 Si  $x = 2$  et  $y = \sqrt{3}$ , trouve sous la forme la plus simple la valeur de :

A  $3(x+y)^4(x-y)^4$  B  $(\frac{x+y}{x-y})^{-2}$

2 Trouve la valeur de  $x$  dans chacun des cas suivants :

- A  $3^{x-2} = 81$  B  $(\sqrt{3})^{x-1} = 9$   
C  $(32)^{x-3} = 8^{2x+1}$  D  $25 \times 3^{x-1} = 9 \times 5^{x-1}$



# Règles de calcul avec les puissances entières non négatives dans $\mathbb{R}$

## Unité 2 Leçon 2

### Réfléchis et discute

[ 1 ] Complète :  $(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 = (\dots\dots\dots)$  Que remarques-tu?

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $m$  et  $n$  sont deux nombres entiers non négatifs,  
alors :  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ .

**Généralisation :**

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $m, n, \dots\dots\dots, k$  sont des nombres entiers non négatifs,  
alors :  $a^m \times a^n \times \dots\dots\dots \times a^k = a^{m+n+\dots\dots\dots+k}$

En utilisant la règle précédente, on trouve que :  $(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^{2+4}$   
 $= (\sqrt{3})^6 = 27$

[ 2 ] Complète :  $(\sqrt{5})^7 \div (\sqrt{5})^3 = (\dots\dots\dots)$  Que remarques-tu ?

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $m$  et  $n$  sont deux nombres entiers non négatifs  
tels que  $m \geq n$ , alors  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

En utilisant la règle précédente, on trouve que :  $(\sqrt{5})^7 \div (\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^{7-3}$   
 $= (\sqrt{5})^4 = 25$

[ 3 ] Complète :  $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^{\dots\dots\dots} \times (\dots\dots\dots)^{\dots\dots\dots} = \dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots$

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  et si  $n$  est un nombre entier non négatif,  
alors :  $(ab)^n = a^n \times b^n$

**Généralisation :**

Si  $a, b, c, \dots\dots, k$  sont des nombres réels non nuls et  $n$  est un nombre entier non négatif,

alors :  $(a \times b \times c \times \dots \times k)^n = a^n \times b^n \times c^n \times \dots \times k^n$

### A apprendre

- ☆ Règles de calcul avec les puissances entières non négatives dans  $\mathbb{R}$
- ☆ Résolution des exercices liés aux puissances entières non négatives dans  $\mathbb{R}$ .

### Expressions de base

- ☆ puissances entières non négatives.
- ☆ ensemble de nombres réels  $\mathbb{R}$ .



[ 4 ] Complète :  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^4 = \frac{(\dots\dots\dots)^{\dots\dots}}{(\dots\dots\dots)^{\dots\dots}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \neq 0$  et  $a \neq 0$ , alors  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ , où  $n$  est un nombre entier non négatif

**Généralisation :** Si  $a, b, c, \dots\dots\dots, k$  sont des nombres réels et  $n$  est un nombre entier non négatif, alors :  $\left(\frac{a \ b \ e \times \dots\dots\dots \times \ell}{c \ d \ f \times \dots\dots\dots \times k}\right)^n = \frac{a^n \ b^n \ e^n \ \dots\dots\dots \ell^n}{c^n \ d^n \ f^n \ \dots\dots\dots k^n}$  où les facteurs du dénominateur sont non nuls.

[ 5 ] Complète :  $(2^2)^3 = (\dots\dots\dots)^{\dots\dots} \times (\dots\dots\dots)^{\dots\dots} \times (\dots\dots\dots)^{\dots\dots} = (\dots\dots\dots)^{\dots\dots}$ . **Que remarques-tu ?**

Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $m$  et  $n$  sont deux nombres entiers non négatifs, alors  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

**Généralisation :** Si  $a, b, c, \dots\dots\dots, k$  sont des nombres réels et  $n$  est un nombre entier non

négatif, alors :  $\left(\frac{b^m \ e^{\ell} \ \dots\dots\dots}{f^k \ d^x \ \dots\dots\dots}\right)^n = \frac{b^{nm} \ e^{n\ell} \ \dots\dots\dots}{f^{nk} \ d^{nx} \ \dots\dots\dots}$

où les facteurs du dénominateur sont non nuls.



**Exemples :**

Mets sous la forme la plus simple :

1  $\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{2})^3$

2  $\left((\sqrt{2})^3 \times (-\sqrt{2})^2\right)^2$

3  $\frac{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^4}$

**Solution**

1  $\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{1+2+3} = (\sqrt{2})^6 = 8$

2  $\left((\sqrt{2})^3 \times (-\sqrt{2})^2\right)^2 = (2\sqrt{2} \times 2)^2 = (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$

3  $\frac{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^4} = (\sqrt{3})^{5+3-4} = (\sqrt{3})^4 = 9$





# Unité 2

## Leçon 3

### Règles de calcul avec les puissances entières non négatives dans $\mathbb{R}$

#### Généralisation des règles de puissances

#### A apprendre

- ☆ Généraliser les règles de puissances entières non négatives et les puissances négatives dans  $\mathbb{R}$ .

#### Expressions de base

- ☆ puissances entières négatives
- ☆ ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Si  $a$  et  $b \in \mathbb{R}^+$ ,  $m$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors :

- ➔  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ➔  $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- ➔  $(a \ b)^n = a^n \times b^n$
- ➔  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- ➔  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

#### Remarques :

- 1 Si  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors chacune des deux expressions  $a^n$  et  $a^{-n}$  est l'inverse de l'autre et  $a^n \times a^{-n} = 1$

**Exemple :**  $(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^{-5} = 1$

- 2 Si  $a$  et  $b \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$

**Exemple :**  $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-5}$  où  $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-5} = 1$



#### Exemples :

- 1 Trouve la valeur de ce qui suit sous la forme la plus simple :

A  $5(\sqrt{5})^{-1}$       B  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$       C  $\frac{2^{-1} \times 4}{3^{-1}}$

#### Solution

A  $5(\sqrt{5})^{-1} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

B  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{+4} = \frac{4}{9}$

C  $\frac{2^{-1} \times 4}{3^{-1}} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$



- 2 Mets sous la forme la plus simple  $\frac{(15)^{-2} \times (\sqrt{5})^3 \times (3)^3}{9 \times (\sqrt{5})^{-3}}$

**Solution**

$$\begin{aligned} \text{L'expression} &= \frac{(3)^{-2} \times (5)^{-2} \times (\sqrt{5})^3 \times (3)^3}{(3)^2 \times (\sqrt{5})^{-3}} = (3)^{-2+3-2} \times (5)^{-2} \times (\sqrt{5})^{3+3} \\ &= (3)^{-1} \times (5)^{-2} \times (\sqrt{5})^6 = \frac{1}{3} \times (5)^{-2} \times (5)^3 = \frac{1}{3} \times (5)^1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

- 3 Si  $\frac{49^n \times 25^{2n} \times 3^{4n}}{7^{-n} \times 15^{4n}} = 343$ , trouve la valeur de  $6^{2n}$

**Solution**

$$\begin{aligned} \therefore \frac{49^n \times 25^{2n} \times 3^{4n}}{7^{-n} \times 15^{4n}} &= 343 & \therefore \frac{7^{2n} \times 5^{4n} \times 3^{4n}}{7^{-n} \times 5^{4n} \times 3^{4n}} &= 343 \\ \therefore 7^{2n-n} &= 343 & \therefore 7^{3n} &= 7^3 \\ \therefore 3n &= 3 & \therefore n &= 1 & \therefore 6^{2n} &= 6^{2 \times 1} = 36 \end{aligned}$$

## Exercices (2 – 3)

[ 1 ] Complète ce qui suit :

- 1 La plus simple forme de l'expression :  $2^{\text{zéro}} + (2)^{-1} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dots\dots\dots$
- 2 Si  $x = (\sqrt{2} + 3)^5$ ,  $y = (\sqrt{2} + 3)^{-5}$ , alors  $x y = \dots\dots\dots$
- 3  $a^{-4} + 1 = a^{-4} (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)$  où  $a \neq 0$
- 4 Si  $2^x \times 5^{-x} = 2,5$ , alors  $x = \dots\dots\dots$
- 5 Si  $4^{x \cdot 10} = \frac{1}{16}$ , alors  $\sqrt[3]{x} = \dots\dots\dots$

[ 2 ] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

- 1 Si  $5^x = 4$ , alors  $5^{x-1}$  est égal à :  A 1,25  B 0,8  C 0,125  D 0,08
- 2  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^9 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^9$  est égal à :  A 1  B  $\sqrt{5}$   C  $\sqrt{6}$   D 5
- 3 Si  $3^x = 5$  et  $\frac{1}{3^y} = 7$ , alors  $3^{x+y} = \dots\dots\dots$   A  $\frac{5}{7}$   B  $\frac{7}{5}$   C 2  D 12
- 4 Si  $2^{x-1} \times 3^{1-x} = \frac{9}{4}$ , alors  $x = \dots\dots\dots$   A -3  B -1  C 1  D 3



[ 3 ] Trouve la valeur de ce qui suit sous la forme la plus simple :

1  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-5}$

2  $(\sqrt{3})^{-4} \times (-\sqrt{2})^4$

3  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

[ 4 ] Mets ce qui suit sous la forme la plus simple :

1  $\frac{(\sqrt{3})^{-5} \times (\sqrt{3})^{-4}}{(\sqrt{3})^{-10}}$

2  $\frac{(10)^2 \times (10)^{-7}}{(0,1)^2 \times 0,001}$

[ 5 ] Trouve la valeur de x dans ce qui suit :

1  $2^x = 32$

2  $2^{x-3} = 1$

3  $3^{x-2} = \frac{1}{9}$

4  $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \frac{8}{125}$

5  $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} = 2\frac{1}{4}$

[ 6 ]

1 Si  $3^x = 27$  et  $4^{x+y} = 1$ , trouve la valeur de x et y.

2 Si :  $2^x + 2^x + 2^x = 48$  ; trouve la valeur de x

3 Mets  $\frac{4^{x-1} \times 9^{2-x}}{6^{2x}}$  dans la plus simple forme, puis trouve la valeur du résultat pour x = 1.



## Opérations sur les puissances entières non négatives dans $\mathbb{R}$

### Réfléchis et discute

[ 1 ] Trouve ce qui suit sous la forme la plus simple :

$$\textcircled{1} \frac{1}{(\sqrt{3})^5} \div 9\sqrt{3} \quad \textcircled{2} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{(\sqrt{3})^3}{2\sqrt{2}}$$

Nous avons déjà étudié que :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (\text{où } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{où } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (\text{où } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (\text{où } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

[ 2 ] Calcule mentalement :  $3 \times 2^2 - 6 \div 3 \times 5 + 4$ .

Utilise une calculatrice pour vérifier le résultat.

*Pour effectuer un calcul, on doit respecter les règles de priorité dans l'ordre suivant :*

- 1 Effectuer les opérations qui sont entre parenthèses si elles existent de l'intérieur vers l'extérieur.
- 2 Effectuer les puissances.
- 3 Effectuer les multiplications et les divisions de la gauche vers la droite.
- 4 Effectuer les additions et les soustractions de la gauche vers la droite.

Les calculatrices respectent ces règles de priorité dans cet ordre.

### A apprendre

☆ Effectuer les opérations (+, -, ×, ÷) sur les puissances entières.

### Expressions de base

- ☆ puissances entières non négatives.
- ☆ puissances entières négatives.
- ☆ ordre des opérations.





### Exemples :

1 Trouve le résultat de ce qui suit dans la plus simple forme :

A  $2^{-3} \times 3^{-2} \div 6^{-4}$

B  $(\sqrt{5})^5 \div 5\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

C  $\frac{2(\sqrt{3})^5 + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)^2}$

D  $\frac{4 \times 3^{x+1} - 11 \times 3^{x-1}}{2 \times 3^x + 7 \times 3^{x-2}}$



### Solution

$$\begin{aligned}
 \text{A } 2^{-3} \times 3^{-2} \div 6^{-4} &= 2^{-3} \times 3^{-2} \times 6^4 \\
 &= 2^{-3} \times 3^{-2} \times 2^4 \times 3^4 = 2^{-3+4} \times 3^{-2+4} \\
 &= 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18
 \end{aligned}$$

On utilise une calculatrice pour tester la qualité du résultat trouvé comme suit :

Départ  $\rightarrow$  2 **x<sup>■</sup>** **(-)** 3 **x** 3 **x<sup>■</sup>** **(-)** 2 **÷** 6 **x<sup>■</sup>** **(-)** 4 **=**

$$\begin{aligned}
 \text{B } (\sqrt{5})^5 \div 5\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} &= (\sqrt{5})^5 \div (\sqrt{5})^3 + 2(\sqrt{3})^2 \\
 &= (\sqrt{5})^{5-3} + 2 \times 3 = (\sqrt{5})^2 + 6 = 5 + 6 = 11
 \end{aligned}$$

2 Si  $\frac{3^x \times 8^x}{12^{x+1}} = \frac{1}{3}$  trouve la valeur de x.

Solution :

$$\begin{aligned}
 \frac{3^x \times 2^{3x}}{(2^2 \times 3)^{x+1}} &= \frac{1}{3} \\
 \frac{3^x \times 2^{3x}}{3^{x+1} \times 2^{2x+2}} &= \frac{1}{3} \\
 3^{x-x-1} \times 2^{3x-2x-2} &= \frac{1}{3} \\
 3^{-1} \times 2^{x-2} &= \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3} \times 2^{x-2} &= \frac{1}{3} \\
 2^{x-2} &= 1 \\
 2^{x-2} &= 2^0 \\
 x-2 &= 0 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$



3 Si  $a = \sqrt{2}$  et  $b = \sqrt{3}$ , trouve la valeur numérique de :

B  $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$

**Solution**

A  $\frac{b^4 - a^4}{b^2 + a^2} = \frac{(b^2 + a^2)(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$

$$= b^2 - a^2 = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

B  $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a + b} = a^2 - ab + b^2 \quad (a \neq -b)$

$$= (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 - \sqrt{6} + 3 = 5 - \sqrt{6}$$



**Pour s'entraîner**

1 Si  $\frac{6^{2n} \times 2^{2n}}{4^{2n} \times 3^{2n+3}} = 9^{-x}$ , détermine la valeur de  $x$ .

2 **En lien avec les affaires commerciales.**

Pour calculer des intérêts composés annuellement, on utilise la formule  $S = m(1 + r)^n$  où  $S$  est la somme finale du capital  $m$  en Livres,  $r$  est l'intérêt annuel d'une Livre et  $n$  est le nombre d'années, calculer  $S$  à une Livre près si  $m = 2,5 \times 10^4$ ,  $b = 9,8 \times 10^{-2}$  et  $n = 12$ .



## Exercices généraux

[ 1 ] Complète ce qui suit :

- 1 La plus simple forme de l'expression :  $2^{-3} \times 2^{-2} \div 4^{-3} = \dots\dots\dots$
- 2 La plus simple forme de l'expression :  $(3^{-2})^3 \div 9^{-3} \times (-2)^{-1} = \dots\dots\dots$
- 3 La plus simple forme de l'expression :  $4^3 \times 3^{-2} \times (\sqrt[3]{-8})^{-5} = \dots\dots\dots$
- 4 Si :  $3^x + 3^x + 3^x = 1$ , alors  $x = \dots\dots\dots$
- 5 Si  $\frac{2^x \times 3^x}{(12)^x} = \frac{1}{2}$ , alors  $x = \dots\dots\dots$

[ 2 ] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

- 1 L'expression :  $\frac{3^x \times 3^x \times 3^x}{3^x + 3^x + 3^x}$  est égale à :  
A  $3^{2x-1}$       B  $3^{1-2x}$       C  $3^{x^3-3x}$       D  $3^{3x-x^3}$
- 2 La valeur numérique de l'expression  $\frac{2^{2n+1} \times 5^{2n+1}}{10^{2n}}$  est égale à :  
A  $\frac{1}{10}$       B 7      C 10      D 100
- 3  $(5^{x+2} - 5^{x+1}) \div 5^x =$   
A 5      B 10      C 15      D 20
- 4 La valeur de  $x$  qui vérifie l'équation :  $2^x + 2^{x+1} = \frac{3}{2}$  est :  
A -2      B -1      C 1      D 2

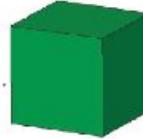
[ 3 ]

- 1 Si  $x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $y = 2 - \sqrt{3}$ , trouve la valeur de  $\frac{x^7 y^8 - y}{(x+y)^9}$  dans la plus simple forme.
- 2 Demontre que  $27^{x+1} x \quad 8^{2x}$   
 $64^x x \quad 27 x \quad 3^{3x} = 1$

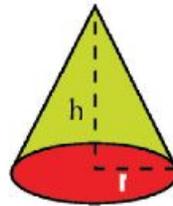


3 Simplifie :  $\frac{4^{x+1} \times 9^{2-x}}{6^{2x}}$ , puis trouve sa valeur si  $x = 1$

- 4 (En lien avec la géométrie) Si l'aire totale d'un cube est égale à  $3,375 \times 10^2 \text{ cm}^2$ ,  
trouve : **A** la longueur de l'arête du cube.  
**B** le volume du cube.



- 5 (En lien avec la géométrie) Si le volume d'un cône circulaire droit est donné par la formule  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , trouve la hauteur d'un cône  $h$  sachant que son volume est  $7,7 \times 10^2 \text{ cm}^3$  et la longueur du diamètre de sa base est 14 cm. [prendre  $\pi = \frac{22}{7}$ ]



- 6 (En lien avec la géométrie) Si le volume d'une sphère est donné par la formule  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ , trouve la longueur du rayon d'une sphère de volume  $3,8808 \times 10^4 \text{ cm}^3$ . [prendre  $\pi = \frac{22}{7}$ ]



- 7 Si :  $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ ,  $a = 128$ ,  $r = \frac{3}{2}$  et  $S = 6,305 \times 10^3$ , trouve la valeur de  $n$ .

### En lien avec la technologie

Pour trouver la valeur de l'expression :  $\frac{(15)^{-2} \times (\sqrt{5})^3 \times (3)^3}{9 \times (\sqrt{5})^{-3}}$  (le résultat =  $\frac{5}{3}$ )

### Indication

On suit les étapes suivantes en utilisant une calculatrice scientifique :

Départ  $\rightarrow$  15  $x^y$  (-) 2  $\times$   $\sqrt{\square}$  5  $x^y$  3  $\times$  3  $x^y$  3  
=  $\div$  ( 9  $\times$   $\sqrt{\square}$  5  $x^y$  (-) 3 ) =



## Activité

1 Mets sous la forme la plus simple :  $(\sqrt{3} + 2)^{11} (\sqrt{3} - 2)^{11}$

2 Si  $a = \sqrt{7}$  et  $b = (\sqrt{7})^{-1}$ , trouve la valeur de :  $a^{101} b^{100}$

3 Trouve le résultat dans la plus simple forme :

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{15}}$$

**Indication :** Multiplie chaque fraction par son conjugué.

## Epreuve de l'unité

[ 1 ] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Le chiffre des unités du nombre  $3^{12} \times 2^{14}$  est :  A 2  B 3  C 4  D 6  E 8

2 Si :  $x \neq 0$ ,  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ , alors  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \dots\dots$   A 1  B 3  C 5  D 7  E 9

3 Combien y a-t-il de nombres composés des chiffres paires compris entre 1000 et 9999 ?  
 A  $3 \times 5^3$   B  $4 \times 5^3$   C  $3 \times 5^4$   D  $4 \times 5^4$   E  $5 \times 5^4$

[ 2 ]

1 Mets sous la forme la plus simple :

A  $((-5)^3)^2 (-\sqrt{5})^{-4}$

B  $\frac{8^{n-1} \times 32^{-n}}{32 \times 4^{-n}}$

C  $\frac{8 \times 2^{2x} + 2 \times (2^x)^2}{\frac{3}{2} \times 2^{2x} - 2^x \times 2^x}$

2 Trouve la valeur de x dans ce qui suit :

A  $(\frac{2}{3})^{x+5} = (3\frac{3}{8})^{-2}$

B  $5^{x^2-5x} = 0,0016$

3 Si  $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x = \frac{4}{9}$ , trouve la valeur de :  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

4 **La population :** Le nombre d'habitants y en millions d'un pays est donné par la formule :

$(y) = 11,7 (1,02)^x$  où x est le nombre d'années à partir de l'an 2005.

Trouve le nombre d'habitants prévu de ce pays à un million d'habitants près :

A en l'an 2011.

B en l'an 2000.



Unité

3

# Probabilité



# Unité 3

## Leçon 1

# Probabilité

### Réfléchis et discute

#### A apprendre :

- ↳ Sens de l'inférence statistique.
- ↳ Notion d'un échantillon.
- ↳ Expérience aléatoire.
- ↳ Ressources des échantillons.
- ↳ Événement.
- ↳ Notion de la probabilité.
- ↳ Estimation.

#### Expressions de base :

- ↳ échantillon
- ↳ expérience aléatoire
- ↳ échantillons et ressources.
- ↳ événement.
- ↳ Probabilité.
- ↳ Prédiction.

Nous avons déjà étudié quelques moyens statistiques utilisés pour collecter et organiser les données d'un phénomène quelconque, pour les présenter dans un tableau des effectifs ou des effectifs cumulés croissants ou des effectifs cumulés décroissants.

Ensuite, les représenter par un histogramme ou un polygone des effectifs ou par une courbe des effectifs ou par d'autres moyens de présentation.

Nous avons pu exprimer des données de manières simplifiées en calculant la moyenne arithmétique, le médian et le mode dans des inférences statistiques afin de prendre des décisions adéquates.

#### L'inférence statistique :



#### Réfléchis :

Avant de construire une usine ou de monter un projet d'investissement, on fait une étude de rentabilité économique du projet.

Lors de l'examen de la qualité d'une production d'une usine, on a constaté que 2 % de la production d'une machine n'est pas conforme aux normes de qualité exigées. Que signifie ce fait ?

L'étude de rentabilité d'un projet est un travail qui permet de donner des indices sur la réussite du projet et l'atteinte de ses objectifs. Nous émettons des hypothèses sur le projet, sur le volume de la main d'œuvre et sur les lieux de marketing de la production. Ensuite, nous étudions ces hypothèses pour prendre les décisions convenables concernant ce projet.



2 % de la production d'une machine n'est pas conforme aux normes de qualité exigées ne signifie pas forcément que parmi 100 unités produites par la machine, on trouve deux unités abîmées. Cela signifie que, dans certains cas, on trouve peut-être trois ou quatre unités abîmées et dans d'autres cas aucune unité abîmée. Le rapport 2 % représente la moyenne des nombres d'unités abîmées lors de l'examen d'un grand nombre d'échantillons de 100 chacun.

### Pour cela on trouve que :

L'inférence statistique est basée sur l'idée de choisir un échantillon de la population en cours d'études, puis de faire une recherche sur cet échantillon pour obtenir des résultats qui peuvent être généralisables sur toute la population étudiée.



### Réfléchis :

Quelles sont les différentes sortes d'échantillons ? Comment peut-on choisir un échantillon aléatoire ? Pourquoi utilise-t-on des échantillons ?

### La notion d'échantillonnage :

**Un échantillon** est une petite partie d'une population qui la représente. Il doit être choisi d'une manière aléatoire et proche de la réalité. Il est utilisé pour faciliter le recueil de données sur la population en cours d'étude. Nous pouvons prendre des décisions à partir des résultats de l'étude sur l'échantillon et généraliser ces résultats sur la population entière.

La probabilité est utilisée pour prendre une décision de l'ensemble des possibles décisions favorables concernant le problème par l'étude de certains phénomènes de cas d'incertains ou des informations non complètes.

### La probabilité :

Nous avons déjà abordé la probabilité expérimentale. Cette probabilité est basée sur la réalisation d'expériences pratiques et la notation des résultats. Dans ce cas, la probabilité est calculée par la formule :

$$\text{Probabilité d'un événement} = \frac{\text{Le nombre de fois où l'événement se réalise}}{\text{Le nombre de tous les résultats possibles}}$$



Si le nombre d'expériences augmente, la probabilité expérimentale s'approche de la probabilité théorique. Dans ce cas :

**Le nombre de fois où un événement se réalise = La probabilité de la réalisation de cet événement × le nombre de tous les événements possibles.**

La probabilité théorique s'appuie sur le principe de l'égalité des chances ou l'égalité des possibilités. Par exemple :

- 1 Si on jette au hasard une pièce de monnaie non pipée, la probabilité pour que pile (P) apparaisse est égale à la probabilité pour que face (F) apparaisse.
- 2 Si on jette au hasard un dé non pipé et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, on trouve que les nombres inscrits sur toutes les faces ont la même chance d'apparaître.
- 3 Si on tire au hasard une boule d'un sac qui contient un ensemble de boules colorées de même volume et dont le nombre de boules de chaque couleur est le même, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
- 4 Si on tire au hasard une carte d'un ensemble de cartes, .....



Une expérience aléatoire :

**C'est une expérience dont on peut déterminer à l'avance tous les résultats possibles mais dont on ne peut pas déterminer le résultat exact avant sa réalisation.**

Un espace des éventualités (E) :

**C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Le nombre d'éléments de cet ensemble est noté  $n(E)$ .**

Un événement :

**C'est un sous ensemble de l'espace des éventualités. Si A est un événement de E, alors  $A \subset E$ , le nombre de ses éléments  $n(A)$  est le nombre de chances que l'événement A se réalise.**

**Notons :** La probabilité pour qu'un événement A se réalise où  $A \subset E$  est noté  $P(A)$ ,  
**D'où :**

$$P(A) = \frac{\text{Le nombre d'éléments de l'événement (A)}}{\text{Le nombre d'éléments de l'espace des éventualités}} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

**Remarque que :**  $\therefore n(A) \leq n(E)$

$$\therefore \frac{n(A)}{n(E)} \leq 1$$

$$\therefore n(A) \in \mathbf{N}, n(E) \in \mathbf{Z}^+$$

$$\therefore \frac{n(A)}{n(E)} \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq 1$$

**Par conséquent**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$





### Exemple (1) :

On tire au hasard une carte parmi 24 cartes, bien mélangées, numérotées de 1 à 24. Calcule la probabilité pour que la carte tirée porte un nombre :

- |  |   |
|--|---|
| <p><b>A</b> multiple de 4</p> <p><b>C</b> multiple de 4 et de 6 à la fois</p> <p><b>E</b> divisible par 25</p> | <p><b>B</b> multiple de 6</p> <p><b>D</b> multiple de 4 ou de 6</p> <p><b>F</b> entier positif inférieur à 25</p> |
|--|---|

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24

#### Solution

L'espace des éventualités = { 1 , 2 , 3 , ... , 24 }  
 $n(E) = 24$

<p><b>A</b> Soit A l'événement « la carte tirée porte un nombre multiple de 4 »</p> <p><math>\therefore A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}</math></p> <p><math>n(A) = 6</math></p> $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	<p><b>B</b> Soit B l'événement « la carte tirée porte un nombre multiple de 6 »</p> <p><math>B = \{6, 12, 18, 24\}</math>, <math>n(B) = 4</math></p> $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
<p><b>C</b> Soit C l'événement « la carte tirée porte un nombre multiple de 4 et de 6 à la fois »</p> <p><math>C = \{12, 24\}</math>, <math>n(C) = 2</math></p> $P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	<p><b>D</b> Soit D l'événement « la carte tirée porte un nombre multiple de 4 ou de 6 ».</p> <p><math>D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 6, 18\}</math></p> <p><math>n(D) = 8</math></p> $P(D) = \frac{n(D)}{n(E)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
<p><b>E</b> Soit X l'événement « la carte tirée porte un nombre divisible par 25 ».</p> <p><math>X = \emptyset</math>, <math>n(X) = 0</math></p> <p><math>\therefore P(X) = \text{zéro}</math></p>	<p><b>F</b> Soit F l'événement « la carte tirée porte un nombre entier positif inférieur à 25 ».</p> <p><math>F = \{1, 2, 3, \dots, 24\}</math></p> <p><math>\therefore n(F) = 24 = n(E)</math></p> $P(F) = \frac{n(F)}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$

**Dans l'exemple précédent, on remarque que :**

- 1** L'événement impossible ( $\emptyset$ ) est un événement qui ne peut pas se réaliser.  
**La probabilité d'un événement impossible = 0**
- 2** L'événement certain est un événement qui se réalise quel que soit le résultat de l'expérience  
**La probabilité d'un événement certain = 1**



La figure ci-contre illustre les résultats

précédents où  $P(A) \in [0, 1]$

Nous pouvons écrire la probabilité sous la forme d'une fraction décimale ou d'un pourcentage.



**Pour t'entraîner :**

- 1 Une boîte contient 40 cartes, bien mélangées, numérotées de 1 à 40. On tire au hasard une carte. Calcule la probabilité pour que la carte tirée porte :
  - A un nombre pair.
  - B un nombre divisible par 3.
  - C un nombre non divisible par 10.
  - D un nombre pair et divisible par 3.
  - E un nombre premier et inférieur à 20.
- 2 Une boîte contient 12 boules rouges, 18 boules blanches et 20 boules bleues. On tire au hasard une boule. **Calcule la probabilité pour que :**
  - A la boule tirée soit blanche.
  - B la boule tirée soit rouge.
  - C la boule tirée soit jaune.
  - D a boule tirée soit non rouge.
  - E la boule tirée soit rouge ou bleue.



**Exemple (2)**

Lors d'un sondage d'opinion fait par une entreprise de produits lessives, on a interrogé un groupe de 300 femmes qui utilisent le produit de cette entreprise sur le poids du produit qu'elles préfèrent acheter. Voici les résultats :

Poids en kilogrammes	125	250	375	500	Total
Nombre de femmes	120	45	96	39	300

I: Si on choisit une femme au hasard, quelle est la probabilité pour que le poids qu'elle préfère acheter soit :

- A 125 g
- B 250 g
- C 375 g
- D 500 g

II: Quel conseil donnes-tu au directeur de l'entreprise d'après les résultats de ce sondage ?



**Solution**

- (1) **A** La probabilité pour qu'une femme achète le produit de 125 g =  
 $\frac{120}{300} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4 = 4 \%$
- B** La probabilité pour qu'une femme achète le produit de 250 g =  
 $\frac{45}{300} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0,15 = 15 \%$
- C** La probabilité pour qu'une femme achète le produit de 375 g =  
 $\frac{96}{300} = \frac{32}{100} = \frac{8}{25} = 0,32 = 32 \%$
- D** La probabilité pour qu'une femme achète le produit de 500 g =  
 $\frac{39}{300} = \frac{13}{100} = 0,13 = 13 \%$

**Remarque que :**

Nous pouvons écrire la probabilité sous forme d'un pourcentage ou d'une fraction ou d'une fraction décimale.

Par exemple, si la probabilité =  $\frac{3}{20}$ , donc la probabilité =  $\frac{3}{20} \times (100) \% = 15\%$

- (2) Rédige tes conseils au directeur de l'entreprise, puis discute avec tes camarades et conserve ces conseils dans ton portfolio.



**Pour t'entraîner :**

Le tableau suivant montre les résultats d'un sondage d'opinion sur les moyens de transports utilisés par les élèves d'un groupe pour se rendre à leurs écoles :

Moyen de transport	Autobus	Voiture	Vélo	À pieds
Nombre d'élèves	3	12	24	66

Si on choisit un élève au hasard, calcule sous forme d'un pourcentage la probabilité pour que cet élève aille à l'école :

- A** en autobus.   **B** en voiture.   **C** en vélo.   **D** à pieds.



**Exemple (3)**

Une compagnie d'assurance-vie a constaté que dans un échantillon de 10000 hommes ayant un âge compris entre 40 et 50 ans, 67 sont morts durant une année.

- A** Quelle est la probabilité pour qu'un homme ayant un âge compris entre 40 et 50 ans meurt durant cette année ?
- B** Pourquoi les compagnies d'assurance s'intéressent-elles à ce genre de résultats ?



- C Si la compagnie d'assurance-vie propose des assurances pour 50000 hommes ayant un âge compris entre 40 et 50 ans, à combien de cas la compagnie doit-elle payer la prime durant une année ?

**Solution**

- A La probabilité de mortalité =  $\frac{67}{10000} = 0,0067$
- B Les compagnies d'assurance s'intéressent à la probabilité expérimentale pour déterminer les primes à verser.
- C Le nombre de décès attendus durant une année = le nombre total de personnes assurés  $\times$  la probabilité de mortalité =  $50000 \times 0,0067 = 335$



**Pour t'entraîner :**

**Une usine produit des lampes électriques. Sur la production de 300 lampes, 18 lampes sont abîmées.**

- A Quelle est la probabilité pour qu'une lampe soit abîmée ?
- B Quelle est la probabilité pour qu'une lampe soit en bon état ?
- C Peut-on avoir une lampe qui soit abîmée et en bon état à la fois ?
- D Calcule la somme de la probabilité pour qu'une lampe soit abîmée et de la probabilité pour qu'une lampe soit en bon état. Que remarques-tu ?
- E Si la production quotidienne de cette usine est de 1600 lampes, quel est le nombre de lampes en bon état produit par jour ?



## Exercices généraux

- 1 Pendant l'entraînement d'une équipe de football, dans le cadre de sa préparation pour le match final du tournoi, un joueur a lancé le ballon 15 fois pour marquer 12 buts et un autre joueur a lancé le ballon 12 fois pour marquer 9 buts. Lequel des deux joueurs l'entraîneur de l'équipe doit-il choisir ? Pourquoi ?
- 2 Une usine produit des calculatrices. Lors de l'examen d'un échantillon aléatoire de 200 calculatrices, on a trouvé que 6 % des calculatrices de l'échantillon sont abîmées.
  - A Quelle est le nombre de calculatrices abîmées dans cet échantillon ?
  - B Si la production de cette usine, en ce mois, est de 1500 calculatrices, quel est le nombre de calculatrices vendables ?



- 3 Une usine qui produit deux sortes de chemises a effectué une étude pour adapter sa production selon les demandes du marché. Dans cette étude, on a visité 5 lieux de vente différents. Dans chaque lieu, on a choisi, au hasard, un échantillon de 100 chemises. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Lieu	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Vente de la première sorte	39	82	34	22	53
Vente de la deuxième sorte	61	18	66	78	47

- A Quelle est la sorte la plus vendue ? Quels conseils donnes-tu à l'usine ?  
 B Si la production totale de l'usine est 4000 chemises, que peux-tu prédire sur le nombre de chemises de la première sorte ?

- 4 Le tableau ci-contre montre les mentions de 50 élèves d'une classe en un mois. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il ait :

Mention	Nombre d'élèves
Très bien	6
Bien	9
Assez bien	11
Passable	16
Insuffisant	8

- A la mention Très bien      B la mention Bien  
 C la mention Insuffisant      D une mention inférieur à bien

- 5 Une équipe joue 30 matches de football dans un tournoi. La probabilité des matches nuls est 0,3 et la probabilité des matches gagnés par l'équipe est 0,6.

**Trouve :**

- A le nombre de matches dans lesquels l'équipe peut sortir à égalité.  
 B le nombre de matches dans lesquels l'équipe peut sortir perdante.
- 6 Dans la ville du 10 Ramadan, une usine pour vêtements produit 6000 pièces par jour. Pour tester la qualité, on a choisi au hasard, un échantillon de 1000 pièces, parmi lesquelles 20 pièces présentant des défauts. Quel est le nombre de pièces, produites par jour, présentant des défauts ?



## Activité

Lors d'un sondage d'opinion, on a interrogé 100 étudiants sur le sport qu'ils préfèrent pratiquer. Voici les résultats.

1 Trouve la probabilité pour qu'un étudiant préfère pratiquer :

- A le football
- B le basketball
- C l'athlétisme
- D le tennis de table
- E le hockey

Jeu préféré	Nombre d'étudiants
Football	44
Basket-ball	27
Athlétisme	12
Tennis de table	4
Hockey	13

2 Si le nombre d'étudiants est 600, quel est le nombre d'étudiants qui peuvent pratiquer le hockey ?

## Epreuve de l'unité

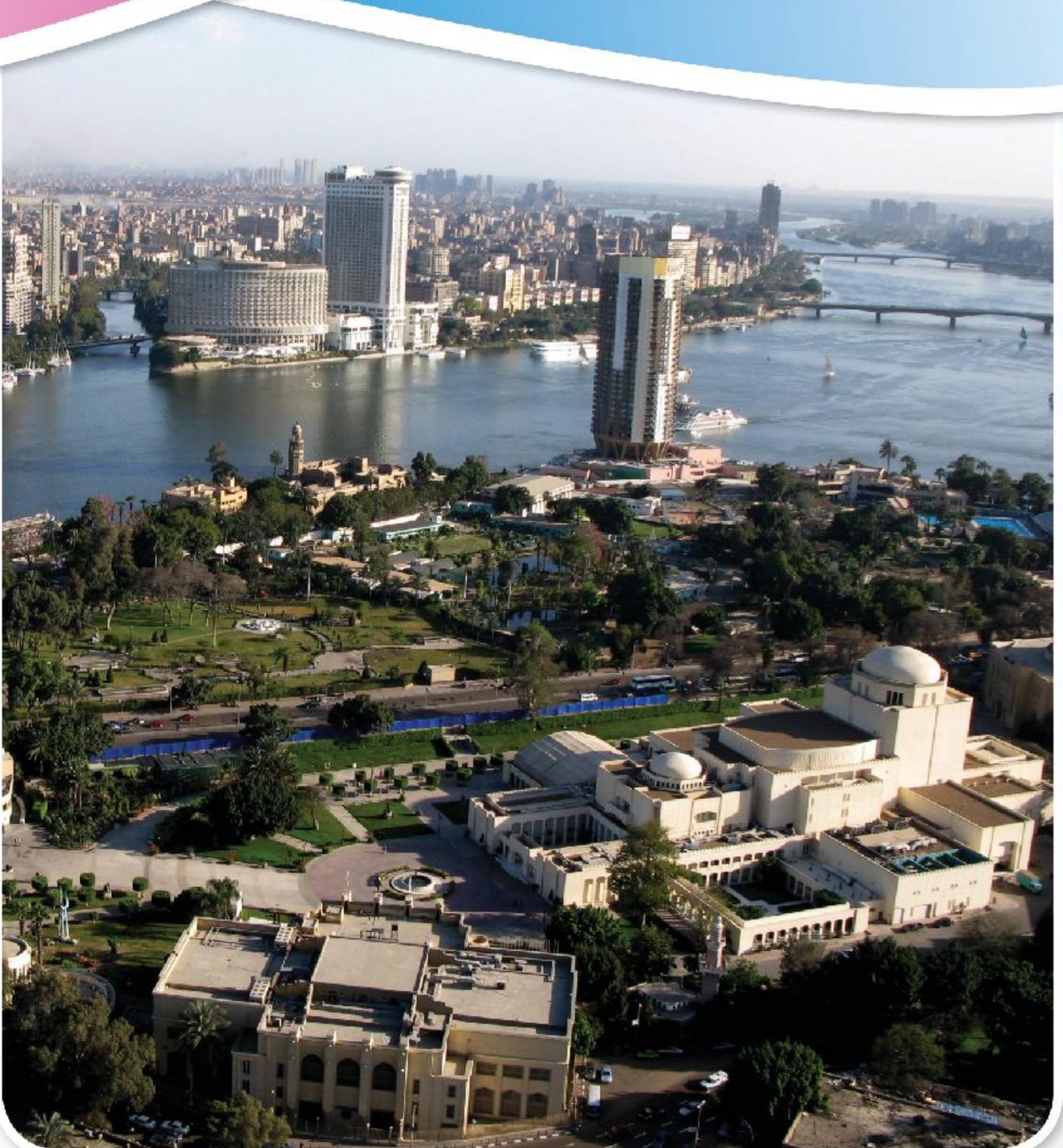
- 1 Dans un projet d'exportation d'agrumes, 30 % des fruits ne répondent pas au critère de la taille. Combien de tonnes l'usine peut-elle exporter en dix jours sachant qu'elle reçoit 20 tonnes d'agrumes par jour ?
- 2 Un sac contient 32 boules d'une même sorte et de même volume. Certaines sont rouges, d'autres sont blanches, d'autres sont vertes et les boules restantes sont jaunes. Si la probabilité de tirer une boule rouge au hasard est  $\frac{3}{8}$ , quelle est le nombre de boules rouges dans le sac ?



Unité

4

Aires



# Unité 4

## Leçon 1

# Parallélogrammes de même aire

### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

- Conditions d'égalité d'aires de deux parallélogrammes.
- Conditions d'égalité d'aires d'un parallélogramme et d'un rectangle.
- Comment trouver l'aire d'un parallélogramme.
- Relation entre l'aire d'un parallélogramme et l'aire d'un triangle ayant une base commune et situés entre deux droites parallèles
- Comment trouver l'aire d'un triangle.

#### Expressions de base :

- aire
- parallélogramme
- rectangle
- triangle
- base
- hauteur
- deux droites parallèles

D'après tes connaissances sur le parallélogramme, réponds aux questions suivantes :

- Quelle est la définition d'un parallélogramme ?
- Quelles sont les propriétés d'un parallélogramme ?
- Est-ce que la distance entre deux droites parallèles est constante ? Explique ta réponse en donnant des exemples de la vie quotidienne.
- Est-ce que le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes ? Pourquoi ?

#### La hauteur d'un parallélogramme :

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme.

Si on considère  $\overline{BC}$  une base et si  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ , alors :

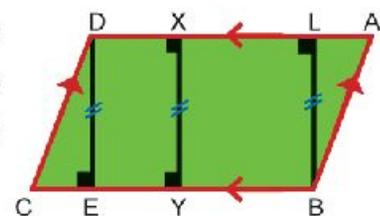
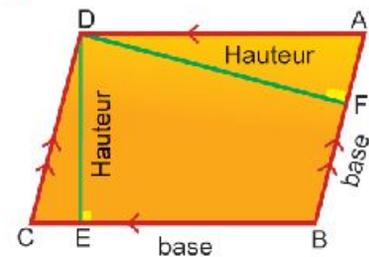
la longueur de  $\overline{DE}$  est la hauteur correspondante à la base  $\overline{BC}$ .

Si on considère  $\overline{AB}$  une base du parallélogramme et si  $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ , alors :

la longueur de  $\overline{DF}$  est la hauteur correspondante à la base  $\overline{AB}$ .

**Remarque que :** la hauteur du parallélogramme correspondante à la base  $\overline{BC}$  est égale à la longueur de  $\overline{DE}$  où :

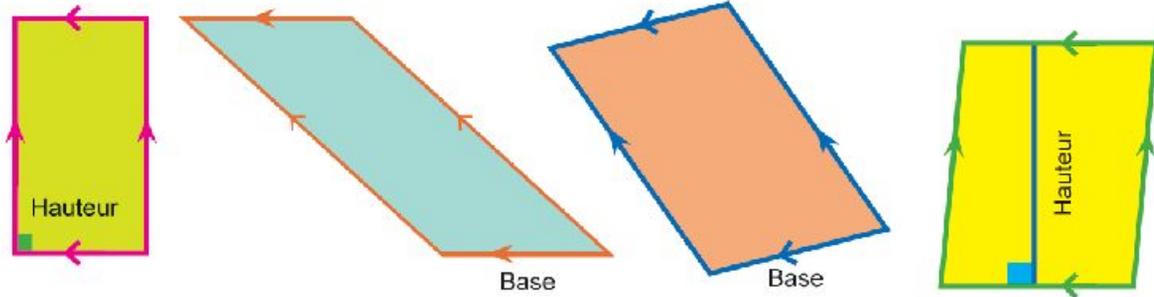
$DE = XY = BL$ . Pourquoi ?





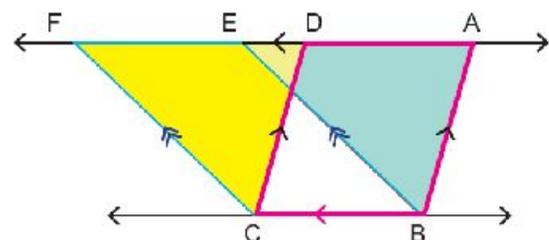
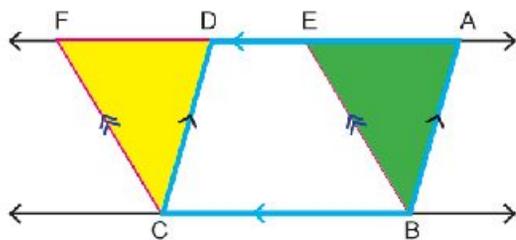
**Pour s'entraîner :**

Détermine la base et la hauteur correspondante pour chacun des parallélogrammes suivants :



### Théorème 1

Deux parallélogrammes ayant une base commune et les côtés opposés à cette base, situés sur une même droite ont la même aire.



**Hypothèses :** ABCD et EBCF sont deux parallélogrammes,  $\overline{BC}$  est une base commune,  
 $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AF}$ .

**Conclusion :** Démontre que l'aire du  $\square$  ABCD = l'aire du  $\square$  EBCF

**Démonstration :**  $\because \triangle DCF$  est l'image de  $\triangle ABE$  par la translation de distance  $\overline{BC}$  dans la direction de  $\overline{BC}$  car la translation est une isométrie.

$$\therefore \triangle DCF \equiv \triangle ABE$$

$$\therefore \text{l'aire de la figure ABCF} - \text{l'aire } \triangle DCF =$$

$$\text{l'aire de la figure ABCF} - \text{l'aire } \triangle ABE$$

$$\therefore \text{l'aire du } \square \text{ ABCD} = \text{l'aire du } \square \text{ EBCF}$$

**Ce qu'il fallait démontrer**





### Réfléchissons :

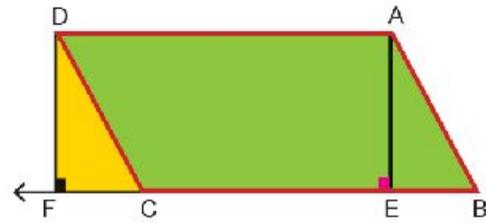
Dans la figure ci-contre :

$ABCD$  est un parallélogramme,  $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ .

Si  $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ , alors :  $\triangle DCF$  est l'image de

$\triangle ABE$  par la translation de distance .....

dans la direction de .....



Quelle est la relation entre l'aire du parallélogramme  $ABCD$  et l'aire du rectangle  $AEFD$  ?

### Corollaires :

#### Corollaire (1)



Si un parallélogramme et un rectangle ont une base commune et les côtés opposés à cette base sont situés sur une même droite, alors ils ont la même aire.

### Remarque que :

L'aire d'un rectangle = longueur  $\times$  largeur

L'aire du rectangle  $AEFD = EF \times AE = BC \times AE$ . Pourquoi ?

L'aire du parallélogramme  $ABCD = BC \times AE$

#### Corollaire (2)



L'aire d'un parallélogramme = longueur d'une base  $\times$  hauteur correspondante

### Remarque que :

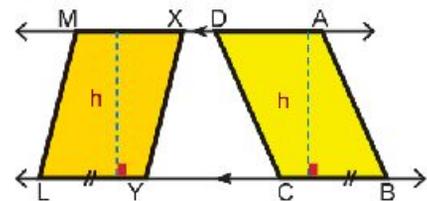
La distance entre deux droites parallèles est constante.

Si  $BC = YL$ , alors :

L'aire du  $\square ABCD = BC \times \dots\dots\dots$

L'aire du  $\square XYLM = YL \times \dots\dots\dots$

Que peux-tu déduire ?



Corollaire (3)

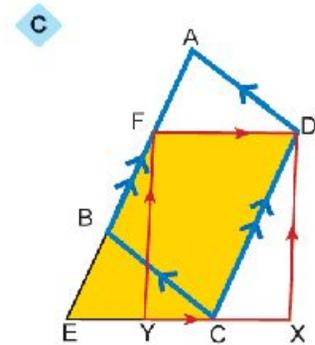
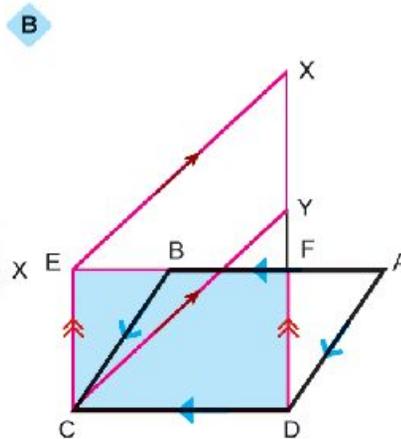
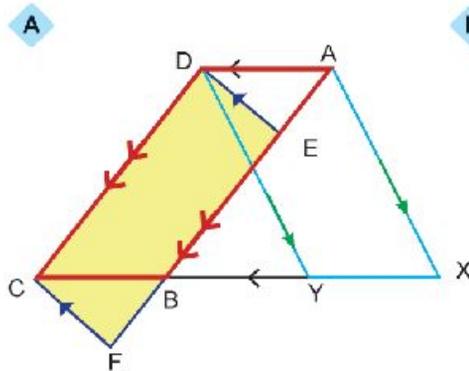


Les parallélogrammes situés entre deux droites parallèles et ayant des bases de même longueur situées sur l'une de ces droites parallèles, ont la même aire.

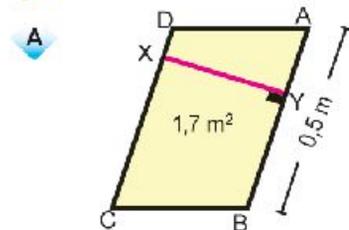


Pour s'entraîner :

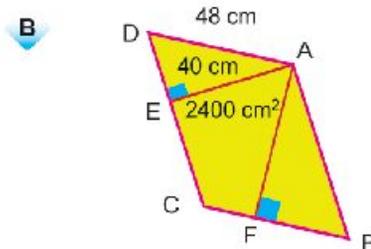
1 Dans chacune des figures suivantes, montre que les trois parallélogrammes ont la même aire :



2 Complète :

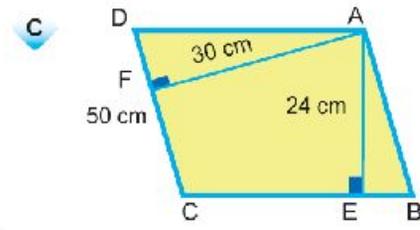


XY = .....



DC = .....

AF = .....

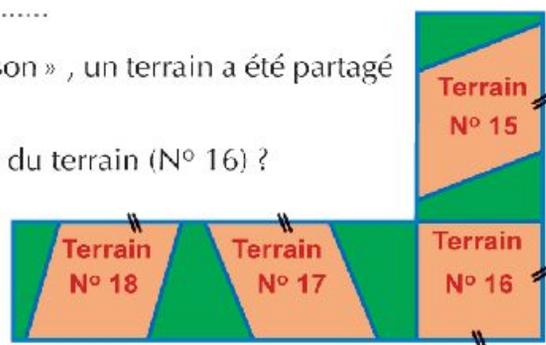


BC = .....

3 Dans le cadre du projet « Construis ta maison », un terrain a été partagé comme le montre la figure ci-contre

Est-ce que l'aire du terrain (N° 15) = l'aire du terrain (N° 16) ?

Cite les numéros des terrains ayant la même aire en justifiant ta réponse.





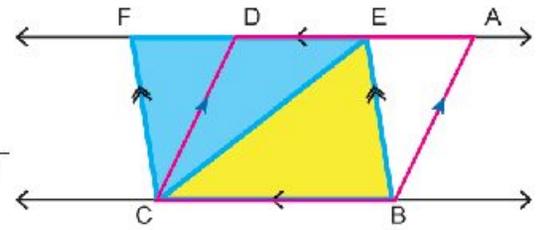
### Réfléchissons :

Dans la figure ci-contre :  $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AF}$ ,  
 ABCD et EBCF sont deux parallélogrammes,  
 $\overline{EC}$  est une diagonale du parallélogramme EBCF

$\therefore$  L'aire de  $\triangle EBC = \dots\dots\dots$  L'aire du  $\square$  EBCF

$\therefore$  L'aire du  $\square$  EBCF = L'aire de  $\dots\dots\dots$

$\therefore$  L'aire  $\triangle EBC = \dots\dots\dots$  L'aire du  $\square$  ABCD



### Corollaire (4)

Si un parallélogramme et un triangle sont situés entre deux droites parallèles et ont une base commune, située sur l'une des deux droites, alors l'aire du triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme.

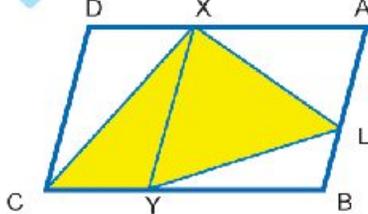


### Pour s'entraîner :

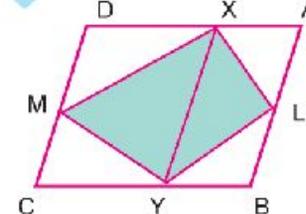
Dans chacune des figures suivantes  $\overline{XY} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ .

Démontrez que l'aire de la figure coloriée est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD.

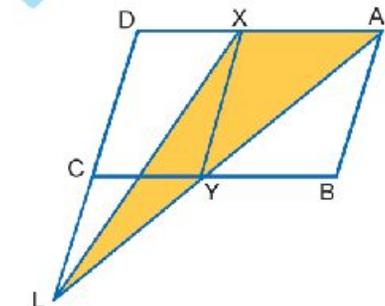
A



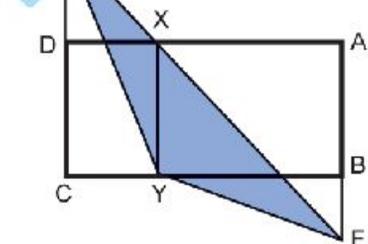
B



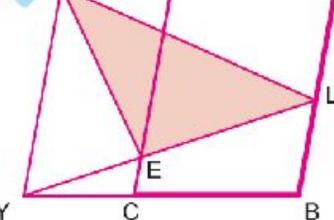
C



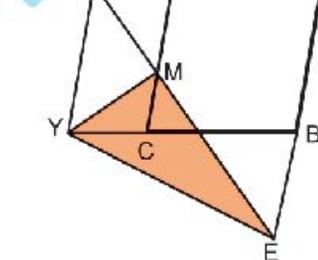
D



E



F



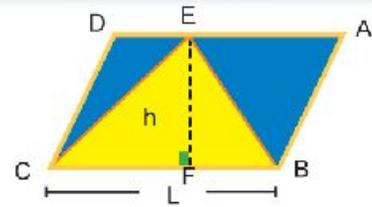


Réfléchissons :

Dans la figure ci-contre :

ABCD est un parallélogramme

L'aire du  $\triangle EBC = \dots\dots\dots$  aire du  $\square ABCD$   
 $= \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots$



Corollaire 5

L'aire d'un triangle =  $\frac{1}{2} \times$  longueur d'une base  $\times$  hauteur correspondante

Remarque que :

- 1 La hauteur d'un triangle est la longueur du segment perpendiculaire abaissé de l'un de ses sommets à la base opposée au sommet.
- 2 Les droites contenant les hauteurs d'un triangle sont concourantes.



Pour s'entraîner :

- 1 Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle rectangle en A,  $AD \perp BC$

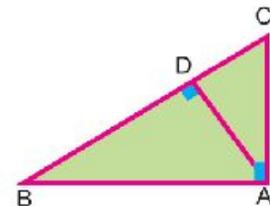
Complète :

L'aire du  $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times \dots\dots\dots$

L'aire du  $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times \dots\dots\dots$

$\therefore AB \times \dots\dots\dots = BC \times \dots\dots\dots$

Si  $AB = 4$  cm et  $AC = 3$  cm, quelle est la longueur de  $\overline{AD}$  ?  $\dots\dots\dots$

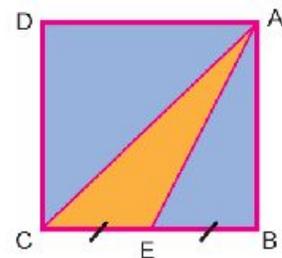


- 2 Dans la figure ci-contre : ABCD est un carré de périmètre 24 cm, E est le milieu de  $\overline{BC}$ .

Complète :

$AB = \dots\dots\dots$  cm ,  $CE = \dots\dots\dots$  cm

L'aire du  $\triangle AEC = \dots\dots\dots$  cm<sup>2</sup>



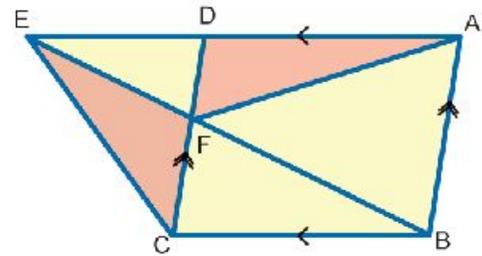


### Exemple

Dans la figure ci-contre :

$ABCD$  est un parallélogramme,  $E \in \overrightarrow{AD}$ ,

$$\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{F\}$$



Démontrez que l'aire du  $\triangle AFD$  = l'aire du  $\triangle EFC$

### Solution

**Hypothèses :**  $\square ABCD$ ,  $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{F\}$

**Conclusion :** Démontrer que l'aire du  $\triangle AFD$  = l'aire du  $\triangle EFC$

**Démonstration :**  $\because$  l'aire du  $\triangle AFB = \frac{1}{2}$  l'aire du  $\square ABCD$  (Corollaire)

$$\therefore \text{l'aire du } \triangle AFD + \text{l'aire du } \triangle BFC = \frac{1}{2} \text{ l'aire du } \square ABCD \quad (1)$$

$$\because \text{l'aire du } \triangle EBC = \frac{1}{2} \text{ l'aire du } \square ABCD \quad (\text{Corollaire})$$

$$\therefore \text{l'aire du } \triangle EFC + \text{l'aire du } \triangle BFC = \frac{1}{2} \text{ l'aire du } \square ABCD \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que :

$$\text{l'aire du } \triangle AFD = \text{l'aire du } \triangle EFC$$

(Ce qu'il fallait démontrer)

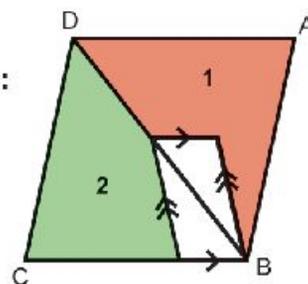


### Réfléchissons

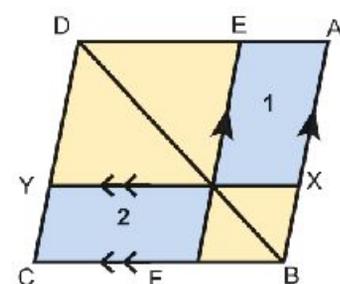
Dans chacune des deux figures :

$ABCD$  est un parallélogramme.

**Pourquoi** l'aire de la figure (1) est égale à l'aire de la figure (2) ?



(A)



(B)

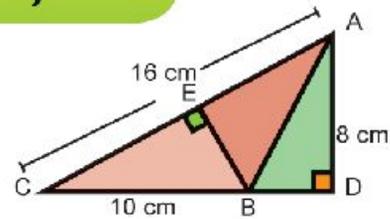


Exercices (4 - 1)

1 Dans la figure ci-contre :

$\overline{AD} \perp \overline{CB}$ ,  $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ,  $AC = 16$  cm.  
 $BC = 10$  cm,  $AD = 8$  cm.

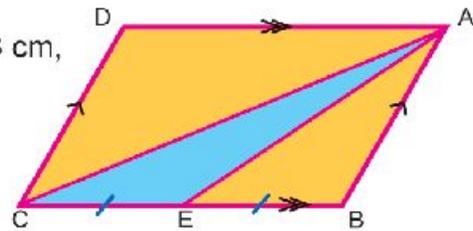
Calcule: (a) l'aire du  $\triangle ABC$  \_\_\_\_\_  
 (b) la longueur de  $\overline{BE}$  \_\_\_\_\_



2 Dans la figure ci-contre :

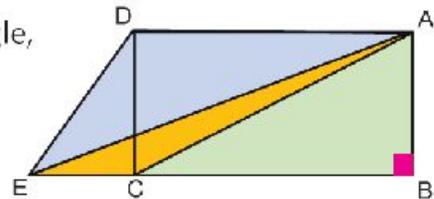
ABCD est un parallélogramme de périmètre 48 cm,  
 $BC = 2 AB$ , l'aire du  $\triangle ABC = 56$  cm<sup>2</sup>,  
 E est le milieu de  $\overline{BC}$ . Calcule :

a) les hauteurs du parallélogramme ABCD  
 b) l'aire du  $\triangle AEC$



3 Dans la figure ci-contre : ABCD est un rectangle,  
 $E \in \overline{BC}$ .

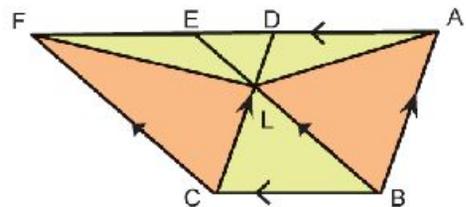
Démontre que :  
 l'aire du  $\triangle DAE =$  l'aire du  $\triangle ABC$



4 Dans la figure ci-contre :

ABCD et EBCF sont deux parallélogrammes,  
 $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{L\}$ ,  $D \in \overline{AF}$ ,  $E \in \overline{AF}$

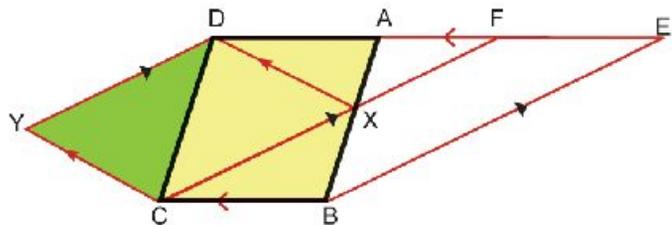
Démontre que :  
 a) l'aire du  $\triangle ABL =$  l'aire du  $\triangle FCL$   
 b) l'aire du quadrilatère ABCL =  
 l'aire du quadrilatère FCBL



5 Dans la figure ci-contre :

$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{XD} \parallel \overline{CY}$ ,  
 $\overline{EB} \parallel \overline{FC} \parallel \overline{DY}$ ,  $X \in \overline{FC}$ ,  
 $F \in \overline{ED}$ ,  $A \in \overline{ED}$

Démontre que :  
 les parallélogrammes EBCF, ABCD et DXCY ont la même aire.



# Unité 4

## Leçon 2

# Triangles de même aire

### Réfléchis et discute

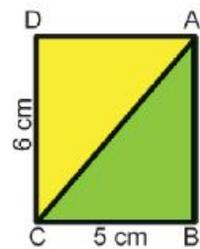
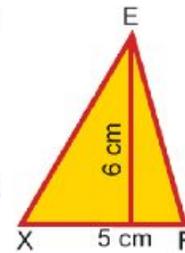
#### À apprendre :

↳ Conditions d'égalité d'aires de deux triangles.

#### Expressions de base :

↳ aire d'un triangle

Deux triangles superposables sont-ils de même aire ?  
 Deux triangles de même aire sont-ils superposables ?  
 Dans quelles conditions deux triangles ont-ils la même aire ?

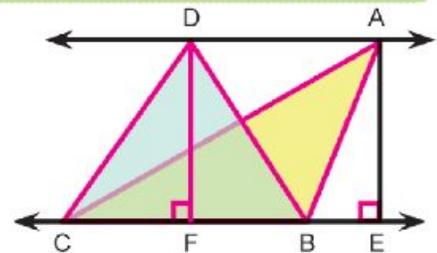


#### Théorème 2

Si deux triangles ont une base commune et si leurs sommets opposés à cette base sont situés sur une droite parallèle à cette base, alors ils ont la même aire.

**Hypothèses :**  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , les deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle DBC$  ont pour base commune  $\overline{BC}$ .

**Conclusion :** Démontrer que l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle DBC$



**Construction :** On trace  $\overline{AE} \perp \overline{BC}$  et  $\overline{DF} \perp \overline{BC}$

**Démonstration :**  $\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overline{AE} \perp \overline{BC}$  et  $\overline{DF} \perp \overline{BC}$

$\therefore$  AEFD est un rectangle,  $AE = DF$

$$\text{l'aire du } \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AE \quad (1)$$

$$\text{l'aire du } \triangle DBC = \frac{1}{2} BC \times DF = \frac{1}{2} BC \times AE \quad (2)$$

De (1) et (2)

$\therefore$  l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle DBC$

**(ce qu'il fallait démontrer)**





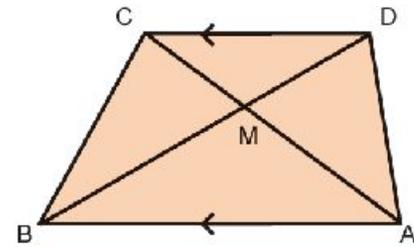
**Pour s'entraîner :**

**1 Dans la figure ci-contre :**

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}, \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}.$$

**Complète en justifiant ta réponse :**

- A** l'aire du  $\triangle ADB$  = l'aire ..... car .....
- B** l'aire du  $\triangle DAC$  = l'aire ..... car .....
- C** l'aire du  $\triangle DAM$  = l'aire ..... car .....

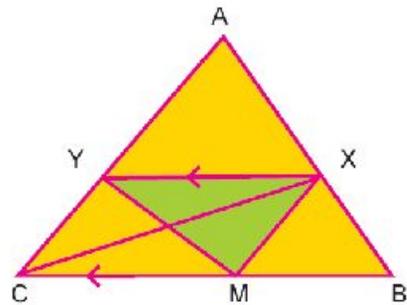


**2 Dans la figure ci-contre :**

$$ABC \text{ est un triangle, } X \in \overline{AB}, Y \in \overline{AC},$$

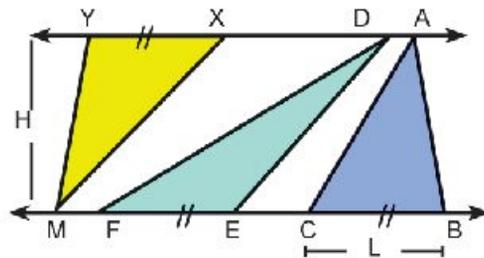
$$\overline{XY} \parallel \overline{BC}, M \in \overline{BC}$$

**Complète :** l'aire du  $\triangle XMY$  = l'aire .....  
 l'aire de la figure AXMY = l'aire ..... Pourquoi ?



**Corollaires :**

**1 Les triangles ayant des bases de mêmes longueurs et qui sont situés entre deux droites parallèles, ont la même aire.**



**Remarque que :**

$$\overleftrightarrow{AY} \parallel \overleftrightarrow{BC}, BC = EF = xy$$

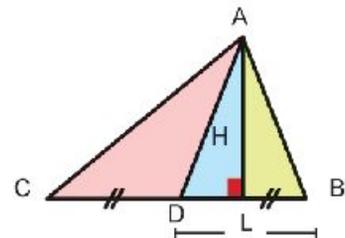
$$\therefore \text{l'aire du } \triangle ABC = \text{l'aire du } \triangle DEF = \text{l'aire du } \triangle XYM = \frac{1}{2} L \times H$$

**2 La médiane d'un triangle partage sa surface en deux triangles de même aire.**

**Remarque que :**

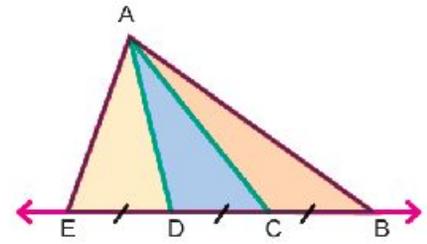
$\overline{AD}$  est une médiane du triangle ABC (BD = DC = L)

$$\therefore \text{l'aire du } \triangle ABD = \text{l'aire du } \triangle ADC = \frac{1}{2} L \times H$$



**3 Les triangles ayant un sommet commun et des bases situées sur une même droite et de même longueur sont de même aire.**

l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle ACD =$  l'aire du  $\triangle ADE$



**Pour s'entraîner**

$ABC$  est un triangle tel que  $\overline{AD}$  est une médiane,  $E \in \overline{AD}$ .

On trace  $\overline{BE}$  et  $\overline{CE}$

**Démontre que :** l'aire du  $\triangle ABE =$  l'aire du  $\triangle ACE$

**Complète :**

$\therefore \overline{AD}$  est une médiane du triangle .....

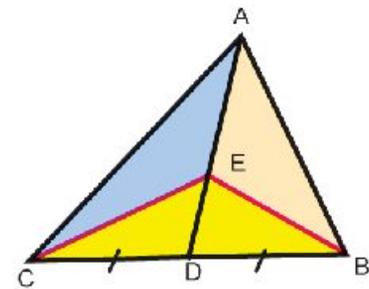
$\therefore$  l'aire du  $\triangle ABD =$  l'aire ..... (1)

$\therefore$  ..... est une médiane du  $\triangle EBC$

$\therefore$  l'aire du  $\triangle EBD =$  l'aire ..... (2)

De (1) - (2), on obtient

l'aire du  $\triangle ABE =$  .....



**Exemple :**

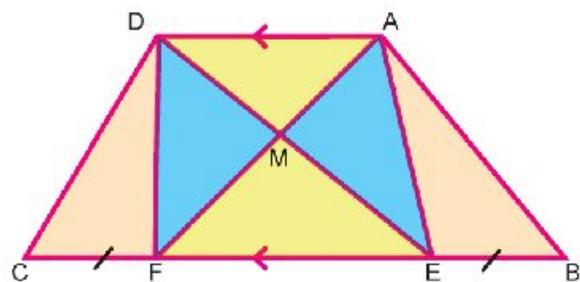
**Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ,  $E \in \overline{BC}$ ,  $F \in \overline{BC}$  tels que  $BE = CF$ ,  $\overline{AF} \cap \overline{ED} = \{M\}$

**Démontre que :**

**A)** l'aire du  $\triangle AME =$  l'aire du  $\triangle DMF$

**B)** l'aire de la figure  $ABEM =$  l'aire de la figure  $DCFM$



**Démonstration :**

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EF}$  et les deux triangles  $AEF$  et  $DEF$  ont pour base commune  $\overline{EF}$

$\therefore$  l'aire du  $\triangle AEF =$  l'aire du  $\triangle DEF$

En retranchant l'aire du  $\triangle MEF$  des deux membres

l'aire du  $\triangle AEM =$  l'aire du  $\triangle DFM$  (1)



$\therefore BE = CF, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\therefore$  l'aire du  $\triangle ABE =$  l'aire du  $\triangle DCF$  (2)

De (1) + (2) on obtient :

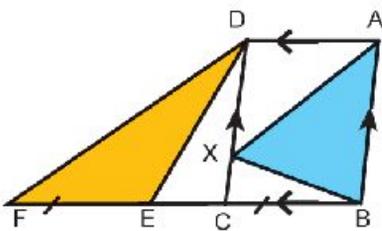
l'aire de la figure ABEM = l'aire de la figure DCFM (ce qu'il fallait démontrer)



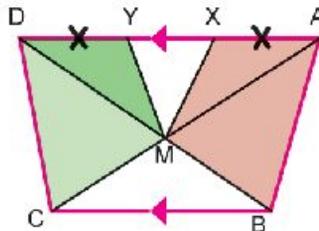
Pour s'entraîner :

Dans chacun cas suivants, démontre que les deux figures coloriées sont de même aire (utilise les données fournies par chaque dessin) :

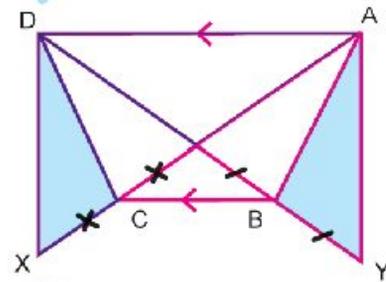
A



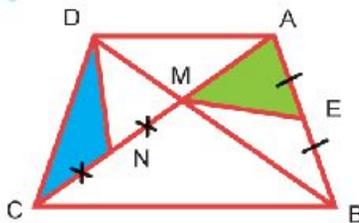
B



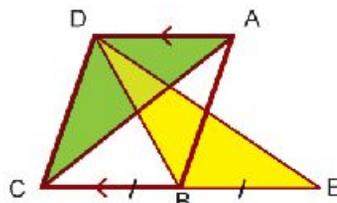
C



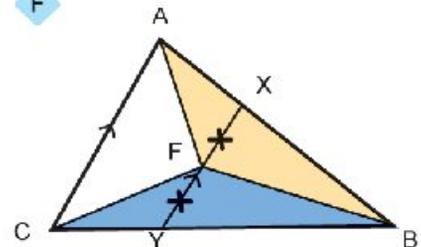
D



E



F



### Théorème 3

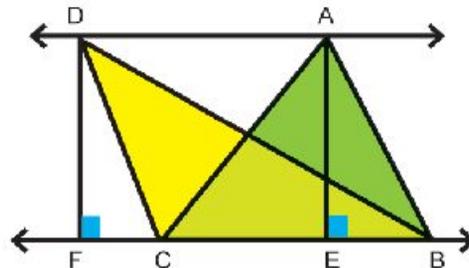
Si deux triangles ont la même aire et une base commune, alors leurs sommets opposés à cette base sont situés sur une droite parallèle à cette base.

**Hypothèses :** l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle DBC$ .

$\overline{BC}$  est une base commune aux deux triangles.

**Conclusion :**  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

**Construction :** On trace  $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ,  
 $\overline{DF} \perp \overline{BC}$



**Démonstration :**  $\therefore$  l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle DBC$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{1}{2} BC \times DF$$

$$\therefore AE = DF$$

$$\therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}, \overline{DF} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore AE \parallel DF$$

$\therefore$  La figure AEFD est un rectangle

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

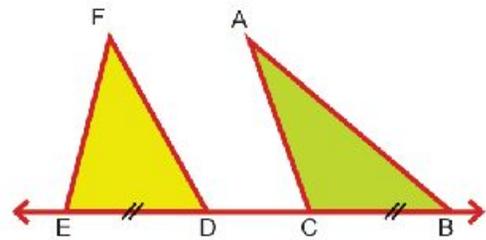


**Réfléchissons :**

**1** Dans la figure ci-contre :

Les points B, C, D, E  
sont alignés et  $BC = DE$

Si l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle FDE$ ,  
que peux-tu déduire ? Justifie ta réponse.

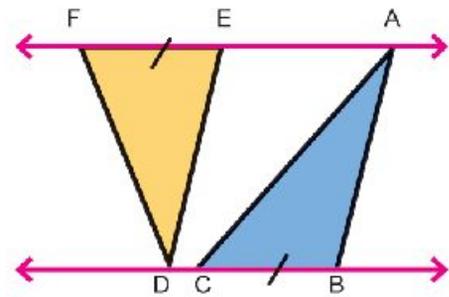


**2** Dans la figure ci-contre :

$D \in BC, A \in FE, BC = EF$

Si l'aire du  $\triangle ABC =$  l'aire du  $\triangle DEF$ ,  
que peux-tu déduire ? Justifie ta réponse.

**Remarque que :**  $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$ . Pourquoi ?



**Exemple**

ABCD est un parallélogramme,

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}, E \in \overline{AB}$$

tel que l'aire du  $\triangle AME =$  l'aire du  $\triangle ABC$

**Démontre que**

la figure BECD est un parallélogramme

**Démonstration :**

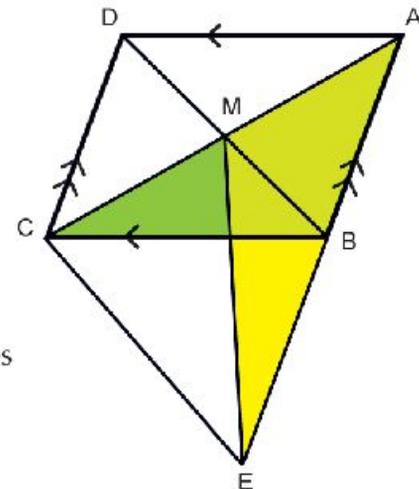
$\therefore$  l'aire du  $\triangle AME =$  l'aire du  $\triangle ABC$

En retranchant l'aire du  $\triangle ABM$  des deux membres

$\therefore$  l'aire du  $\triangle BME =$  l'aire du  $\triangle BMC$

Ces deux triangles ont pour base commune

$\overline{BM}$  et ils sont situés d'un même côté par rapport à cette base.



$$\therefore \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{BM} \quad (1)$$

$\because$  ABCD est un parallélogramme

$$\therefore \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{DC} \quad (2)$$

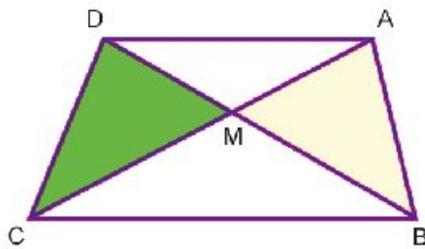
De (1), (2), la figure DBEC est un parallélogramme.



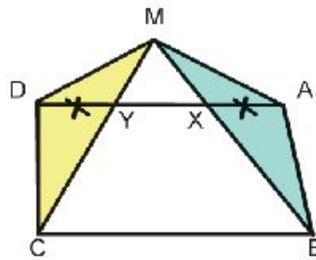
**Pour s'entraîner :**

**1** Dans chacun des cas suivants, les deux triangles coloriés sont de même aire. Démontre que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .

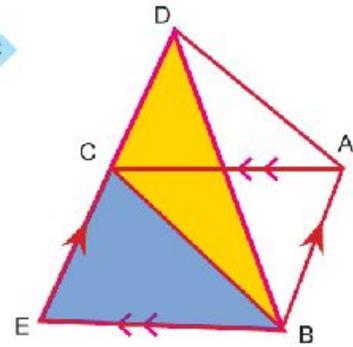
**A**



**B**



**C**



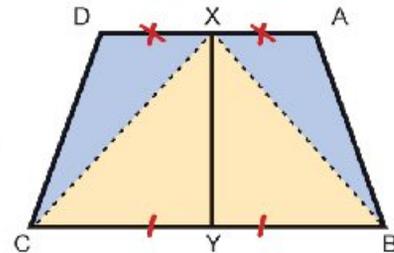
**2** Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère, X est le milieu de  $\overline{AD}$ ,

Y est le milieu de  $\overline{BC}$ .

l'aire de la figure ABYX = l'aire de la figure DCYX.

Démontre que :  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



**Indication**

Trace  $\overline{BX}$  et  $\overline{CX}$

Dans  $\triangle XBC$ ,  $\overline{XY}$  est une médiane. Que peux-tu déduire ?

L'aire du  $\triangle AXB$  = l'aire ..... Pourquoi ?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  Pourquoi ?



## Exercices (4 - 2)

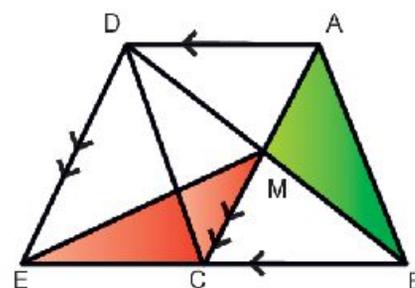
1 Dans la figure ci-contre :

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}, E \in \overline{BC}, \overline{AC} \parallel \overline{DE},$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$$

Démontrez que :

- a) l'aire du  $\triangle ABM =$  l'aire du  $\triangle DCM$   
 $=$  l'aire du  $\triangle EMC$
- b) l'aire du  $\triangle DBC =$  l'aire du  $\triangle EBM$



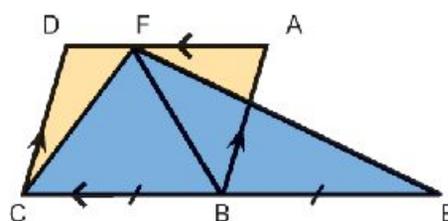
2 Dans la figure ci-contre :

ABCD est un parallélogramme,  $E \in \overline{CB}$ ,

$$BC = BE$$

Démontrez que :

l'aire du  $\triangle FEC =$  l'aire du  $\square ABCD$



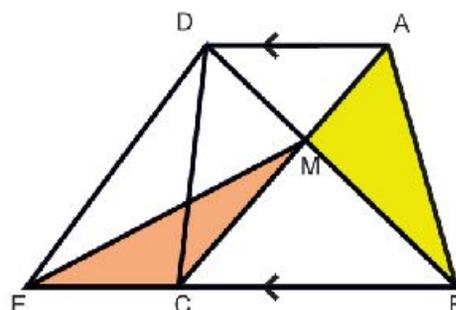
3 Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère tel que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ,

$$E \in \overline{BC}, \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\},$$

l'aire du  $\triangle ABM =$  l'aire du  $\triangle ECM$ .

Démontrez que :  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ .

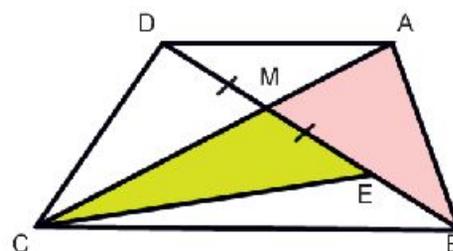


4 Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère de diagonales qui se coupent en M,  $E \in \overline{BM}$ ,  $ME = MD$ ,

l'aire du  $\triangle AMB =$  l'aire du  $\triangle CME$

Démontrez que :  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

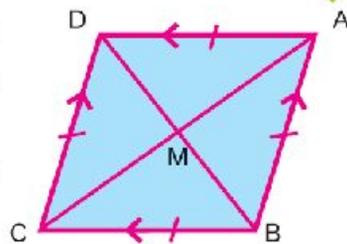


# Aires de quelques figures géométriques

## Réfléchis et discute

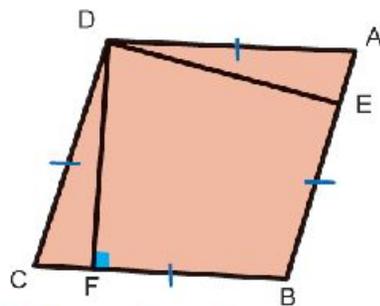
Nous avons déjà appris qu'un losange est un parallélogramme dont les côtés sont de même longueur.

- 🌀 Quelle relation y a-t-il entre les diagonales d'un losange ?
- 🌀 Comment calculer l'aire d'un losange ?



### Aire d'un losange :

- 1 Si la longueur du côté d'un losange est  $b$  et sa hauteur  $h$ , alors, l'aire du losange =  $b \times h$



D'où :

l'aire du losange = longueur de la base  $\times$  hauteur



### Réfléchissons :

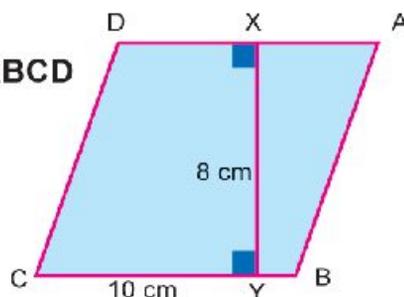
Est-ce que  $DE = DF$  ? Justifie ta réponse.



### Pour s'entraîner :

- 1 Trouve l'aire du losange ABCD

A Aire = .....



### À apprendre :

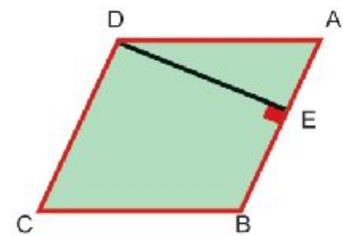
- 🔗 Comment calculer l'aire d'un losange.
- 🔗 Comment calculer l'aire d'un carré connaissant les longueurs de ses diagonales.
- 🔗 Comment calculer l'aire d'un trapèze.

### Expressions de base :

- 🔗 carré
- 🔗 losange
- 🔗 trapèze
- 🔗 aire



- B** Le périmètre du losange ABCD = 24 cm, DE = 5cm  
Son aire = .....



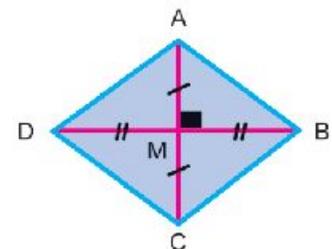
- 2** Tu sais que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Observe la figure ci-contre puis complète :

L'aire du losange ABCD = 2 l'aire du  $\triangle ABD$

$$= 2 \times \frac{1}{2} BD \times \dots\dots\dots$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times 2 \dots\dots\dots$$

$$= \frac{1}{2} BD \times \dots\dots\dots$$



**Donc l'aire d'un losange =  $\frac{1}{2}$  le produit des longueurs de ses diagonales**

**$\therefore$  Le carré est un losange dont les diagonales sont de même longueur :**

**$\therefore$  l'aire d'un carré =  $\frac{1}{2}$  le carré de la longueur d'une diagonale**



**Pour s'entraîner :**

**Trouve l'aire de chacune des figures suivantes :**

- 1** un losange de longueur de côté 12 cm et de hauteur 8 cm.
- 2** un losange de longueurs de diagonales 8 cm et 10 cm.
- 3** un carré de longueur de diagonale 8 cm.
- 4** un losange de périmètre 52 cm dont la longueur de l'une de ses diagonales est 10 cm.
- 5** un losange de périmètre 60 cm, dont la mesure de l'un de ses angles est  $60^\circ$ .



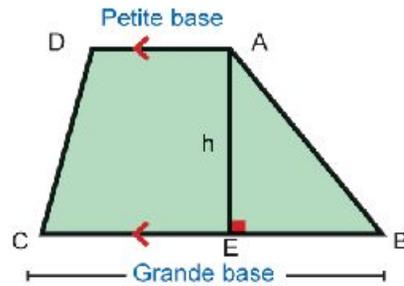
## Trapèze

Un trapèze est quadrilatère ayant uniquement deux côtés parallèles. Ces côtés parallèles sont appelés « les bases du trapèze ».

Dans la figure ci-contre :

$\overline{AD}$  et  $\overline{BC}$  sont les bases du trapèze ABCD.

Le trapèze admet une hauteur. C'est la distance perpendiculaire « h » entre ses deux bases.

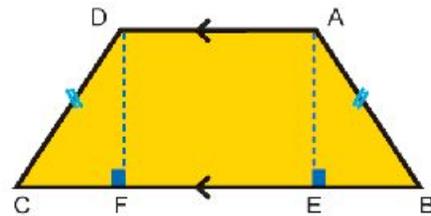


Réfléchissons :

Est-ce que la diagonale d'un trapèze partage sa surface en deux triangles de même aire ?

Si ABCD est un trapèze isocèle ( $AB = DC$ ), est-ce que  $m(\angle B) = m(\angle C)$  ?

Trace  $AE \perp BC$  et  $DF \perp BC$ , puis justifie ta réponse.



Dans un trapèze isocèle :

ABCD est un trapèze tel que  $AB = DC$ . Alors :

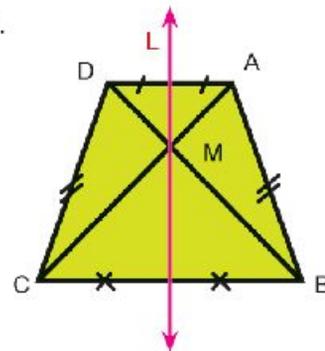
1 Les deux angles de chaque base sont de même mesure.

$$m(\angle B) = m(\angle C), \text{ et } m(\angle A) = m(\angle D).$$

2 Les diagonales sont de même longueur  $AC = BD$ .

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$$

$$\therefore AM = DM \text{ et } BM = CM$$



3 Il y a un seul axe de symétrie « L » qui coupe les deux bases en leurs milieux.

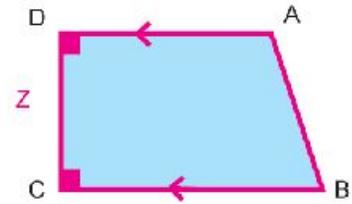


### Trapèze rectangle :

C'est un trapèze ayant un angle droit.

Dans la figure ci-contre :  $\overline{DC} \perp \overline{BC}$  et  $\overline{CD} \perp \overline{AD}$

$\therefore$  la hauteur du trapèze = la longueur de  $\overline{CD}$



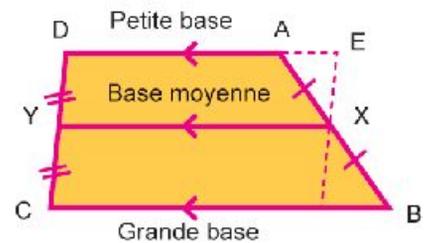
### Base moyenne d'un trapèze :

C'est le segment  $\overline{XY}$  joignant les milieux des deux côtés non parallèles dans le trapèze ABCD.

#### Remarque que :

$$\overline{XY} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

La longueur de  $\overline{XY} = \frac{1}{2} (DA + BC)$

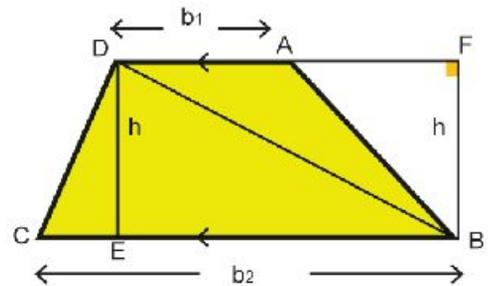


### Pour s'entraîner

Trouve la longueur de la base moyenne d'un trapèze de longueurs de bases 7 cm et 13 cm.

### Aire d'un trapèze :

$$\begin{aligned} \text{L'aire du trapèze ABCD} &= \text{l'aire du } \triangle ABD + \text{l'aire du } \triangle DBC \\ &= \frac{1}{2} AD \times BF + \frac{1}{2} BC \times DE \\ &= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h \\ &= \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h \end{aligned}$$



Aire d'un trapèze =  $\frac{1}{2}$  somme des longueurs de ses deux bases  $\times$  hauteur

Remarque que : La longueur de la base moyenne =  $\frac{1}{2} \times$  somme des longueurs de ses deux bases.

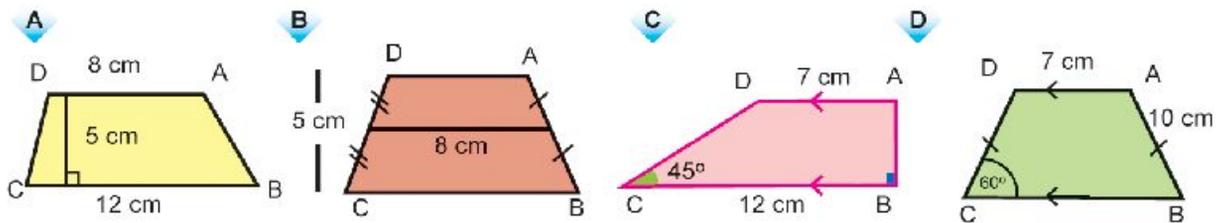
$\therefore$  Aire d'un trapèze = longueur de la base moyenne  $\times$  hauteur





Pour s'entraîner :

Utilise les données de chacune des figures suivantes pour calculer l'aire de la figure :



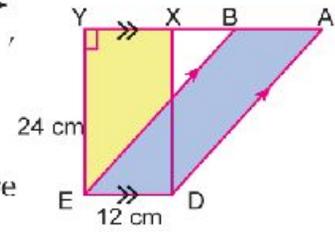
### Exercices (4 - 3)

- 1 L'aire d'un trapèze est  $450 \text{ cm}^2$  et les longueurs de ses deux bases parallèles sont 24 cm et 12 cm. Calcule la longueur de sa hauteur.
- 2 L'aire d'un trapèze est  $108 \text{ cm}^2$ . La longueur de l'une de ses deux bases parallèles est 15 cm et la longueur de sa hauteur est 8 cm. Calcule la longueur de l'autre base.
- 3 Soit un trapèze d'aire  $180 \text{ cm}^2$  et de hauteur 12 cm. Le rapport entre les longueurs de ses deux bases est 3 : 2. Calcule les longueurs des deux bases.
- 4 Soient deux terrains de même aire. L'une est sous forme d'un losange de longueurs de diagonales 18 m et 24 m et l'autre est sous la forme d'un trapèze de hauteur 12 m. Calcule la longueur de la base moyenne du trapèze.
- 5 L'aire d'un trapèze isocèle est  $120 \text{ cm}^2$  et son périmètre est 60 cm. Si la longueur de sa base moyenne est 20 cm, calcule la longueur de chacune de ses deux bases.
- 6 ABCD est un rectangle tel que  $AB = 6 \text{ cm}$  et  $BC = 8 \text{ cm}$ . X, Y, Z et M sont les milieux respectifs des côtés  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  et  $\overline{AD}$ .
  - A Démontre que la figure XYZM est un losange puis calcule son aire.
  - B Calcule la hauteur du losange XYZM.
- 7 Soit un terrain de forme d'un trapèze. Le rapport respectif entre les longueurs de ses deux bases parallèles et de sa hauteur est 3 : 2 : 4. Calcule la longueur de sa base moyenne sachant que son aire est  $4000 \text{ cm}^2$ .



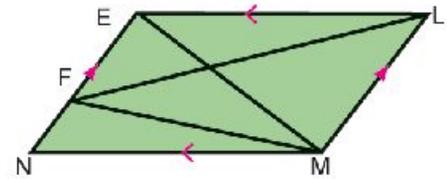
## Exercices généraux

- 1 Dans la figure ci-contre :  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ ,  $X \in \overline{AB}$ ,  $Y \in \overline{AB}$ ,  $XDEY$  est un rectangle,  $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$



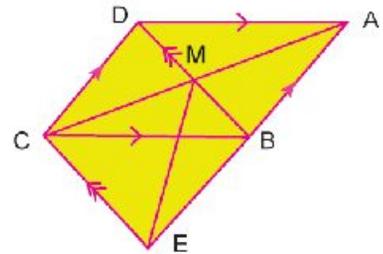
- a) Calcule l'aire de la figure ABED  
 b) Si  $AD = 30$  cm, calcule la longueur de la perpendiculaire abaissée de B sur  $\overline{AD}$

- 2 Dans la figure ci-contre : LMNE est un parallélogramme.



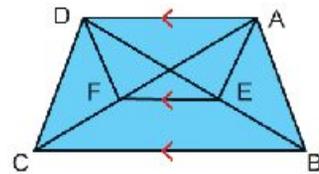
**Démontre que :** l'aire du  $\triangle LEF$  + l'aire du  $\triangle MFN$  = l'aire du  $\triangle LEM$ .

- 3 ABCD et BECD sont deux parallélogrammes tels que  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ .



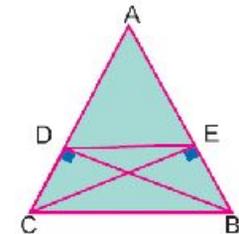
**Démontre que :**  
 l'aire du  $\triangle ABD$  = l'aire du  $\triangle MEC$

- 4 Dans la figure ci-contre :  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{EF}$ .



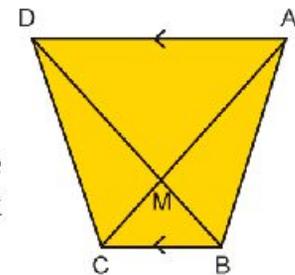
**Démontre que :** l'aire du  $\triangle ABE$  = l'aire du  $\triangle DCF$

- 5 Dans la figure ci-contre :  $AB = AC$ ,  
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ,  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ . **Démontre que.**



- a)  $ED \parallel BC$   
 b) l'aire du  $\triangle ADB$  = l'aire du  $\triangle AEC$

- 6 Dans la figure ci-contre :  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Démontre que l'aire du  $\triangle ABM$  = l'aire du  $\triangle DMC$ .  
 Si l'aire du  $\triangle MBC = 20$  cm<sup>2</sup>,  
 et l'aire du  $\triangle ABM = 3$  fois l'aire du  $\triangle MBC$ , calcule l'aire du rectangle ayant pour côté  $\overline{BC}$  et dont le côté opposé est situé sur  $\overleftrightarrow{AD}$ .



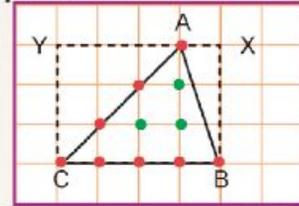
## Activité

Utilise la règle de Pick pour calculer l'aire d'une surface polygonale.

Dans un quadrillage graphique, comment peux-tu trouver l'aire d'une surface polygonale ? Pour répondre à cette question, observe ce qui suit :

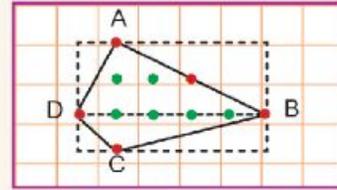
1 Dans la figure ci-contre :

$$\begin{aligned} \text{aire du } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \text{ aire du rectangle XBCY} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \end{aligned}$$



2 Dans la figure ci-contre :

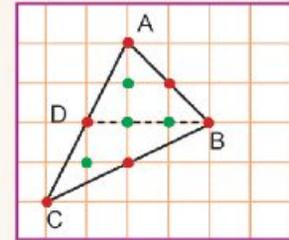
$$\begin{aligned} \text{aire de la figure ABCD} &= \text{aire du } \triangle ABD + \text{aire du } \triangle CBD \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 1 \\ &= 5 + \frac{5}{2} = 7 \frac{1}{2} \text{ unités d'aires} \end{aligned}$$



3 Dans la figure ci-contre :

Pour trouver l'aire du  $\triangle ABC$ , on partage sa surface en petites surfaces dont on peut calculer les aires.

$$\begin{aligned} \therefore \text{aire du } \triangle ABC &= \text{aire du } \triangle ABD + \text{aire du } \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \\ &= 6 \text{ unités d'aires} \end{aligned}$$



Dans chacune des figures précédentes :

Observe les points rouges de chaque quadrillage. Ce sont des nœuds du quadrillage situés sur les côtés de la figure. Ils sont appelés « points frontaliers ». Soit F le nombre de ces points. Observe également le nombre de points verts situés à l'intérieur de chaque figure, appelés « points intérieurs ». Soit I le nombre de ces points.

Complète en justifiant ta réponse :

	I	F	$M = I + \frac{F}{2} - 1$	aire
Figure (1)	3	8	$3 + \frac{8}{2} - 1$	6
Figure (2)	6	5	$6 + \frac{5}{2} - 1$	$7 \frac{1}{2}$
Figure (3)	....	....	.....	.....

Dessine des figures différentes sur des quadrillages. Calcule leurs aires géométriquement, puis vérifie le résultat en utilisant la règle de Pick.

$$\text{Aire} = \text{nombre de points intérieurs} + \frac{\text{Nombre de points frontaliers}}{2} - 1$$

Explique comment peut-on appliquer la règle de Pick dans des situations de la vie quotidienne.



## Epreuve de l'unité

### 1 Complète :

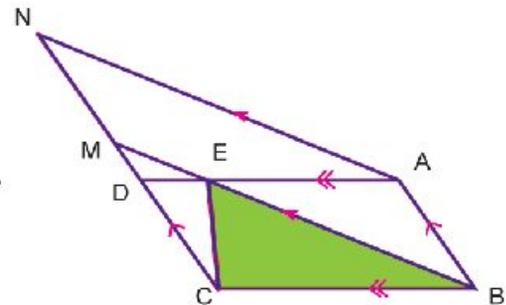
- A L'aire d'un losange ayant pour longueurs de diagonales 6 cm et 8 cm est .....
- B Les diagonales d'un trapèze isocèle sont .....
- C L'aire d'un trapèze ayant pour longueur de la base moyenne 7 cm et sa hauteur 6 cm est .....
- D Les triangles ayant des bases de mêmes longueurs et situés entre deux droite parallèles sont .....
- E Une médiane d'un triangle partage sa surface en .....
- F Si l'aire d'un carré est  $50 \text{ cm}^2$ , alors la longueur de sa diagonale = ..... cm

### 2 Dans la figure ci-contre :

ABCD et ABMN sont deux parallélogrammes.

Démontrez que :

l'aire du  $\triangle EBC = \frac{1}{2}$  l'aire du  $\square$  ABMN

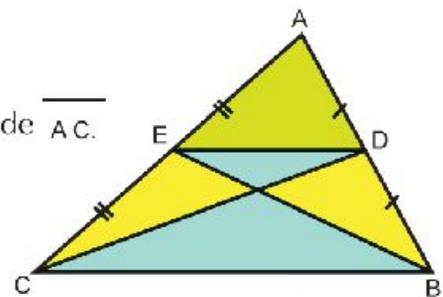


### 3 Dans la figure ci-contre :

$\triangle ABC$ , D est le milieu de  $\overline{AB}$  et E est le milieu de  $\overline{AC}$ .

Démontrez que :

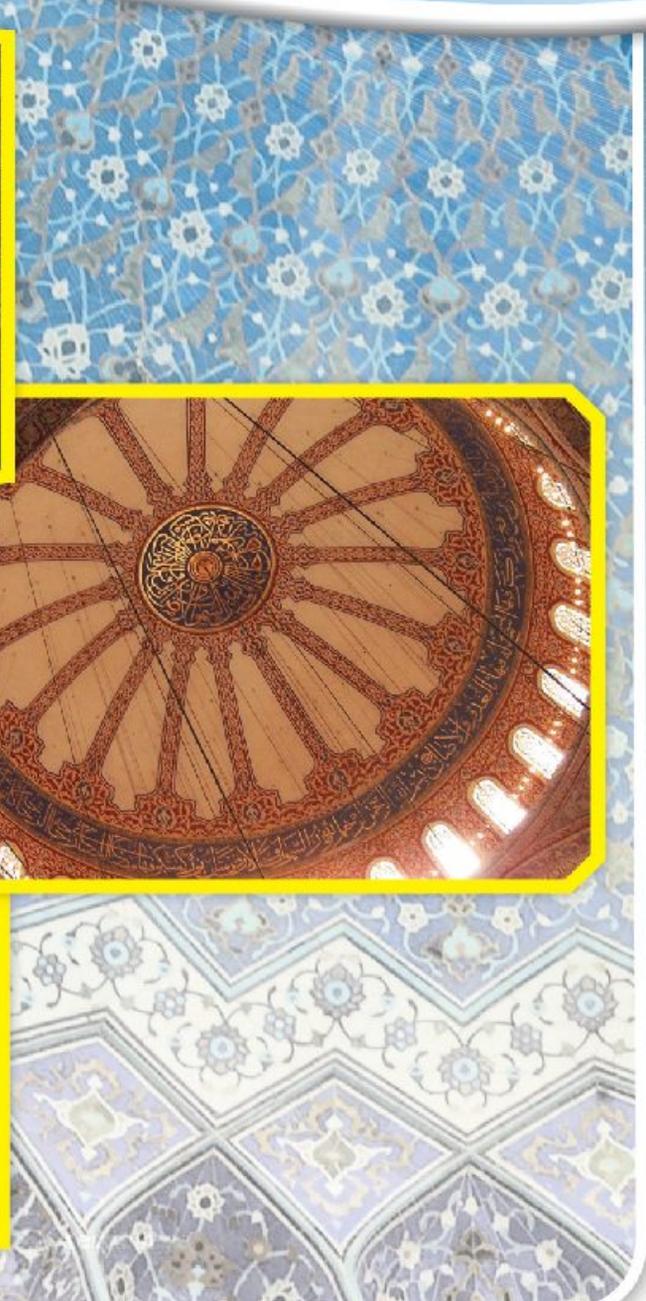
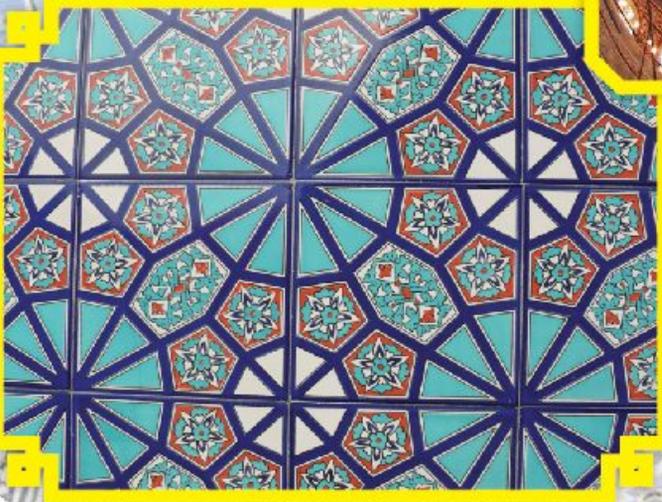
- a) l'aire du  $\triangle DBC =$  l'aire du  $\triangle EBC$ .
- b)  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



Unité

5

## Similtude, Réciproque de théorème de pythagore et théorème d'Euclide



# Unité 5

## Leçon 1

# Similitude

### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

- ☞ La notion de similitude.
- ☞ Cas de similitude de deux polygones.
- ☞ Cas de similitude de deux triangles.

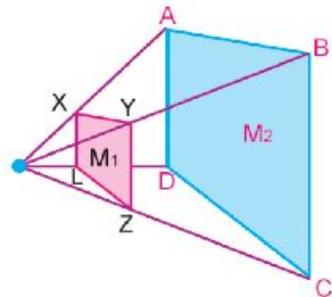
#### Expressions de base :

- ☞ similitude
- ☞ longueurs proportionnelles
- ☞ angles correspondants

Dans la salle de développement technologique et pendant l'exposition de certains exercices et certaines applications sur les transformations géométriques :

#### Ossama dit :

La symétrie, la translation et la rotation sont des isométries car par chacune de ces transformations, la figure et son image sont superposables. Elles ont les côtés correspondants de même longueur et les angles correspondants de même mesure.



#### Ahmed dit :

Dans une projection d'exercices, les figures apparaissant sur l'écran de l'ordinateur ressemblent aux figures projetées. Elles ont les angles correspondants de même mesure, mais les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

Est-ce que le polygone ABCD est semblable au polygone XYZL ? Pourquoi ?

#### Définitions :

Deux polygones sont semblables s'ils vérifient les deux conditions :

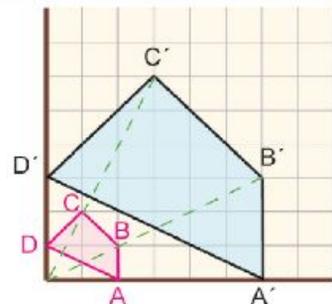
- les angles correspondants sont de même mesure.
- les côtés correspondants sont proportionnels.



#### Exemple :

Dans la figure ci-contre :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} =$$
$$\frac{A'D'}{AD} = \frac{3}{1}$$



$$m(\angle A') = m(\angle A), m(\angle B') = m(\angle B),$$

$$m(\angle C') = m(\angle C), m(\angle D') = m(\angle D)$$

∴ La figure ABCD est semblable à la figure A'B'C'D'.

### Remarque que :

- Il faut nommer les polygones semblables en écrivant les sommets correspondants dans le même ordre. Dans l'exemple précédent, la figure A'B'C'D' est semblable à la figure ABCD. On utilise le symbole ( $\sim$ ) pour exprimer la similitude. Donc on écrit la figure A'B'C'D'  $\sim$  la figure ABCD.
- Le rapport constant entre les longueurs des côtés correspondants est appelé **le rapport d'agrandissement** ou **l'échelle**.  
**Remarque que :** si le rapport d'agrandissement est 1, alors les deux polygones sont superposables.
- Tous les polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables. Pourquoi ?
- Si deux polygones sont semblables, alors leurs angles correspondants sont de même mesure et les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.



**Réfléchis :** Le carré et le rectangle ont les angles correspondants de même mesure, mais ils ne sont pas semblables. Pourquoi ?  
Le carré et le losange ont les côtés correspondants proportionnels mais ils ne sont pas semblables. Pourquoi ?



### Pour s'entraîner :

- Lesquels des couples de polygones suivants sont semblables ? Pourquoi ? Nomme les polygones semblables en écrivant les sommets correspondants dans le même ordre.

**A**

**B**

**C**

**D**



## Similitude de deux triangles :

### Définition

Deux triangles sont semblables s'ils vérifient l'une des deux conditions :

- les angles correspondants sont de même mesure.
- les côtés correspondants sont proportionnels.

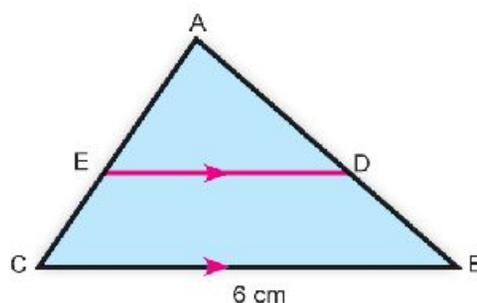


### Exemple :

Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle tel que  $AB = 5$  cm,  $BC = 6$  cm et  $AC = 7$  cm,  $D \in \overline{AB}$  tel que  $AD = 3$  cm,

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{DE} \cap \overline{AC} = \{E\}$ .

- A Démontrez que  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .
- B Trouvez la longueur de  $\overline{DE}$  et  $\overline{AE}$ .



### Solution

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle B)$ ,  $m(\angle AED) = m(\angle C)$ . Pourquoi ?

$\therefore \angle A$  est commun aux deux triangles ADE et ABC.

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$  car les angles correspondants sont de même mesure. Donc :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad \therefore \frac{3}{5} = \frac{DE}{6} = \frac{AE}{4}$$

$$\therefore DE = \frac{3 \times 6}{5} = 3,6 \text{ cm} \quad AE = \frac{3 \times 4}{5} = 2,4 \text{ cm}$$



### Pour s'entraîner :

A l'aide des données des figures ci-contre,

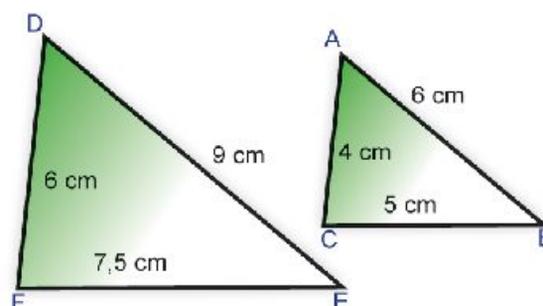


démontrez que :

A  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

B  $\frac{\text{périmètre}(\triangle DEF)}{\text{périmètre}(\triangle ABC)}$

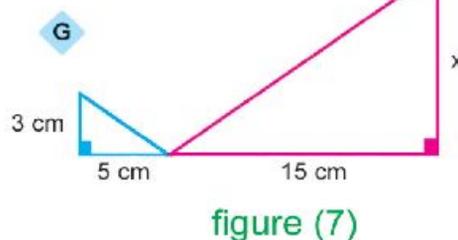
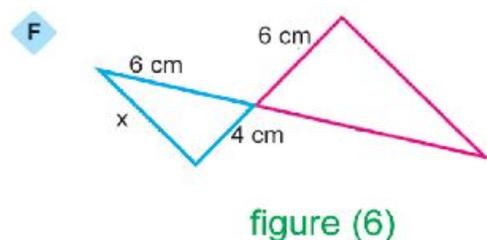
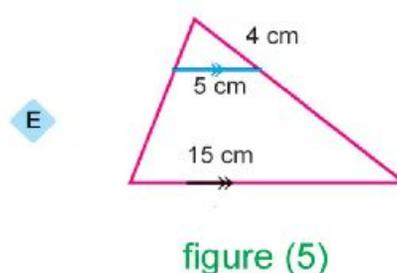
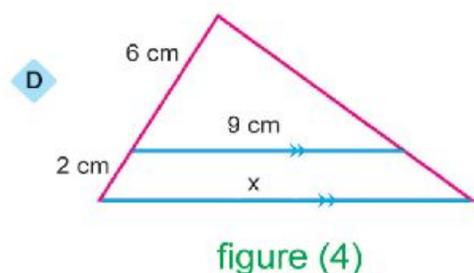
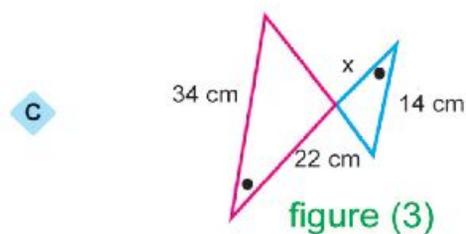
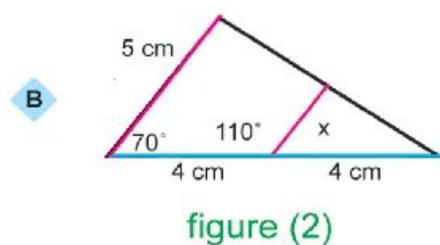
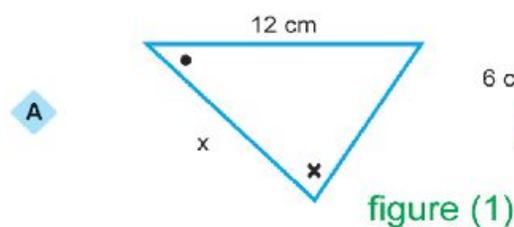
= le rapport d'agrandissement



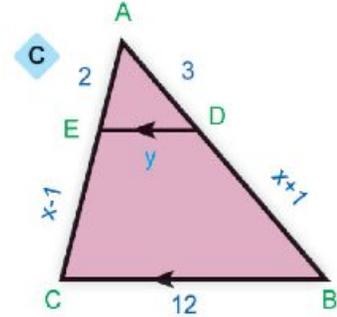
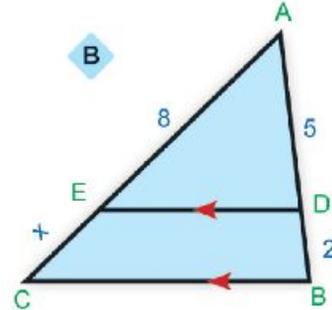
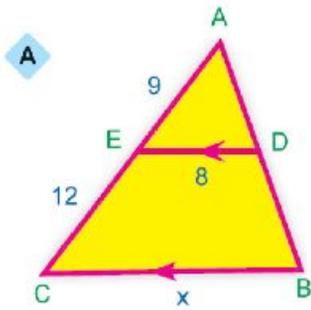
périmètres de deux triangles semblables = le rapport entre les longueurs de deux côtés correspondants des deux triangles.

## Exercices (5 - 1)

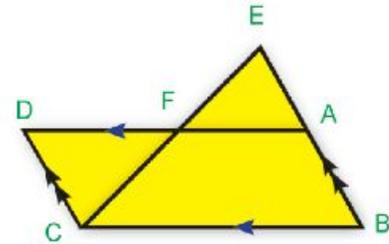
- 1 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de  $x$  et  $y$  (les longueurs sont donnés en centimètres) :



- 2 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de  $x$  et  $y$  (les longueurs sont donnés en centimètres) :



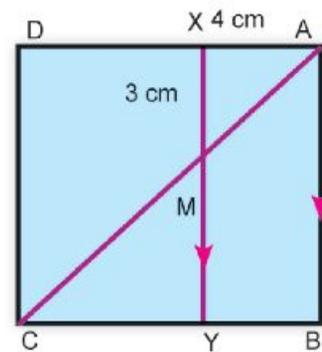
- 3 Dans la figure ci-contre : ABCD est un parallélogramme,  $E \in \overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD} = \{F\}$ . Si  $EC = BC = 10$  cm,  $AB = 4$  cm, et  $FD = 6$  cm, trouve la longueur de  $\overline{EB}$  ;  $\overline{EA}$  et  $\overline{FC}$



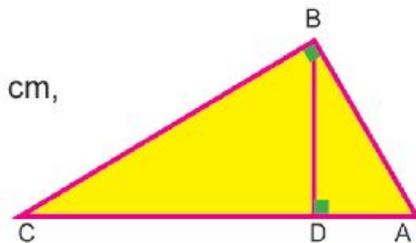
- 4 Dans la figure ci-contre : ABCD est un rectangle tel que  $AD = 12$  cm,

$X \in \overline{AD}$  tel que  $AX = 4$  cm. On trace  $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$  qui coupe  $\overline{AC}$  en M et  $\overline{BC}$  en Y,  $MX = 3$  cm.

- A Démontre que  $\triangle AMX \sim \triangle CMY$ .  
 B Trouve le périmètre du  $\triangle YMC$ .  
 C Est-ce que la figure  $ABYM \sim$  la figure  $CDXM$  Pourquoi ?



- 5 ABC est un triangle rectangle en B tel que  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm,  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ .  
 Démontre que :  $\triangle BAC \sim \triangle DAB$ , puis trouve la longueur de  $\overline{AD}$  et  $\overline{DC}$ .



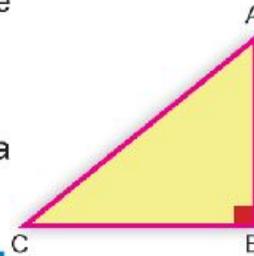
# Réciproque du théorème de Pythagore

## Réfléchis et discute

D'après le théorème de Pythagore, on sait que si ABC est un triangle rectangle en B, alors :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Dans la suite, nous allons étudier la réciproque du théorème de Pythagore.



### À apprendre :

- » La réciproque du théorème de Pythagore.
- » L'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes.

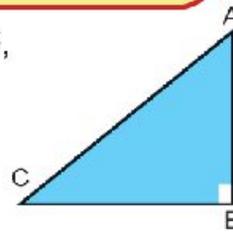
### Réciproque du théorème de Pythagore :

Si la somme des aires des deux carrés construits sur deux côtés d'un triangle est égale à l'aire du carré construit sur le troisième côté, alors le triangle est rectangle.

Dans le triangle ABC, Si  $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ,

alors :  $m(\angle B) = 90^\circ$  et le triangle est rectangle en B.

Nous pouvons reformuler l'énoncé de la réciproque du théorème de Pythagore comme suit :



Si le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

### Corollaire :

Dans un triangle ABC, si  $\overline{AC}$  est le côté le plus long et si  $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ ,

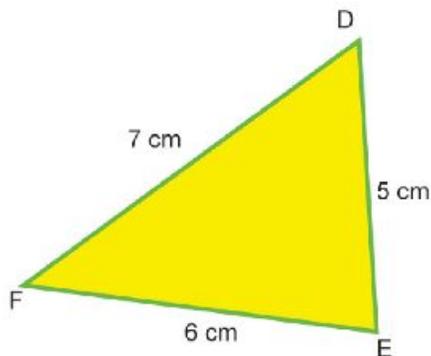
alors le triangle ABC n'est pas rectangle.



## Exercices (5 – 2)

1 Lesquels des triangles suivants sont rectangles ? Complète :

A

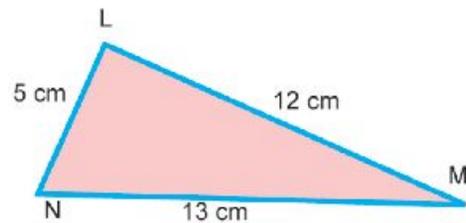


$$DF^2 = \dots$$

$$DE^2 + FE^2 = \dots$$

∴ Le triangle .....

B

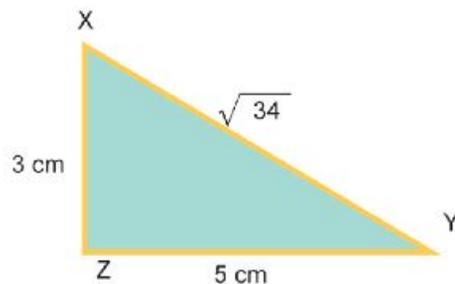


$$MN^2 = \dots$$

$$ML^2 + NL^2 = \dots$$

∴ Le triangle .....

C

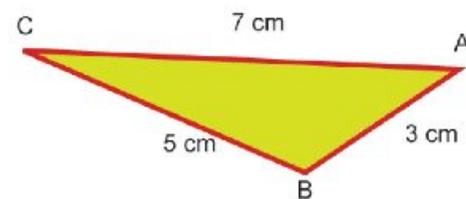


$$XY^2 = (\sqrt{34})^2 = \dots$$

$$YZ^2 + ZX^2 = \dots$$

∴ Le triangle .....

D



$$AC^2 = \dots$$

$$AB^2 + BC^2 = \dots$$

∴ Le triangle .....

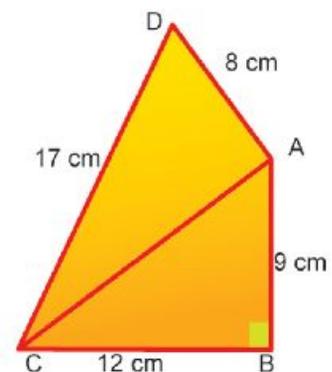
2 Dans la figure ci-contre : ABCD est un quadrilatère tel que :

$m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $AB = 9$  cm,  $BC = 12$  cm,  $CD = 17$  cm

et  $DA = 8$  cm.

Démontrez que :

$m(\angle DAC) = 90^\circ$ , puis trouvez l'aire de la figure ABCD.



## Projections

## Réfléchis et discute

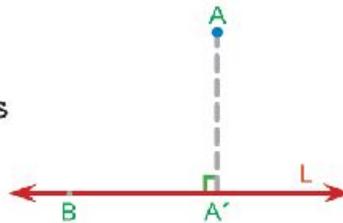
Si un morceau de craie tombe de ta main, est-ce qu'il va tomber : verticalement vers le bas (perpendiculaire au sol) ?  
Quelle trace, laisse ce morceau de craie sur le sol ?

## Projection d'un point sur une droite

Dans la figure ci-contre :

$L$  est une droite,  $A$  et  $B$  sont deux points tels que  $A \notin L$  et  $B \in L$ .

On trace  $\overline{AA'} \perp L$ , ou  $A' \in L$ .



Le point  $A'$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur la droite  $L$ . Le point  $A'$  est appelé «la projection orthogonale de  $A$  sur la droite  $L$ »

$\therefore B \in L \quad \therefore$  la projection de  $B$  sur  $L$  est le point  $B$  lui-même.

Remarque que :

- La projection d'un point sur une droite est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.
- Si un point appartient à une droite, sa projection sur la droite est le point lui-même.

## À apprendre :

- » Trouver la projection d'un point sur une droite.
- » Trouver la projection d'un segment sur une droite.
- » Trouver la projection d'une demi-droite sur une droite.
- » Trouver la projection d'une droite sur une droite.

## Expressions de base :

- » projection
- » point
- » segment
- » demi-droite
- » droite



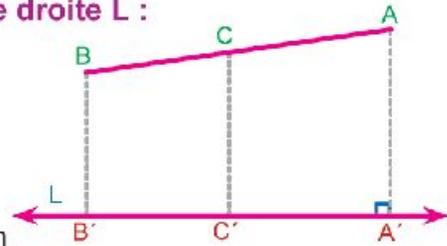
## Projection d'un segment sur une droite

**Pour trouver la projection d'un segment  $\overline{AB}$  sur une droite  $L$  :**

**Si**  $A'$  est la projection du point  $A$  sur la droite  $L$   
 et si  $B'$  est la projection du point  $B$  sur la droite  $L$ ,

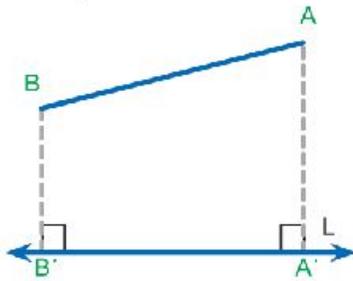
**alors** la projection de  $\overline{AB}$  sur la droite  $L$  est  $\overline{A'B'}$ .

**Remarque que :** Si  $C \in \overline{AB}$  et si  $C'$  est la projection du point  $C$  sur la droite  $L$ , **alors :**  $C' \in \overline{A'B'}$

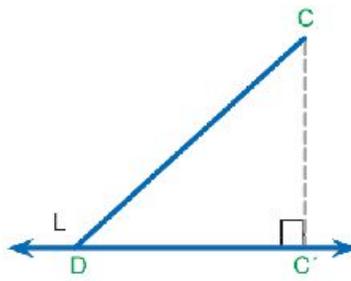


**Pour s'entraîner :**

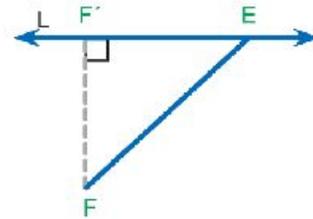
Les figures suivantes montrent des segments dans des positions différentes. Dans chaque figure, complète en écrivant la projection du segment demandé, suivant l'exemple :



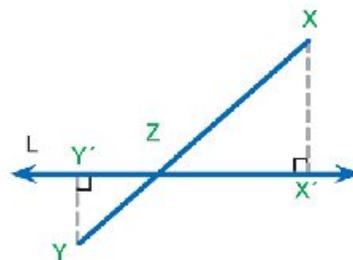
La projection de  $\overline{AB}$  sur la droite  $L$  est  $\overline{A'B'}$



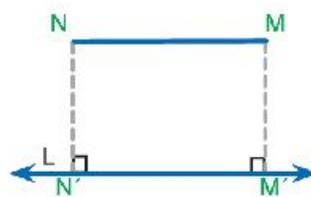
La projection de  $\overline{CD}$  sur la droite  $L$  est .....



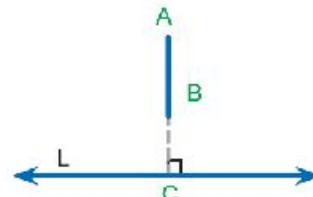
La projection de  $\overline{EF}$  on sur la droite  $L$  est .....



La projection de  $\overline{XY}$  sur la droite  $L$  est .....



La projection de  $\overline{MN}$  sur la droite  $L$  est .....



La projection de  $\overline{AB}$  sur la droite  $L$  est .....



**Observe et discute :**

- A** La longueur de la projection d'un segment sur une droite donnée est toujours plus petite ou égale à la longueur du segment lui-même.
- B** Dans quelle condition, la longueur de la projection d'un segment sur une droite donnée est égale à la longueur du segment lui-même ?
- C** Dans quelle condition, la longueur de la projection d'un segment sur une droite donnée est nulle ?

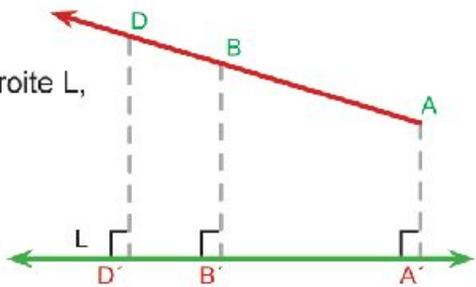
**Projection d'une demi-droite sur une droite**

**Pour trouver la projection d'une demi-droite  $\vec{AB}$  sur une droite L :**

**Remarque que :**  $A'$  est la projection du point A sur la droite L,  
 $B'$  est la projection du point B sur la droite L.

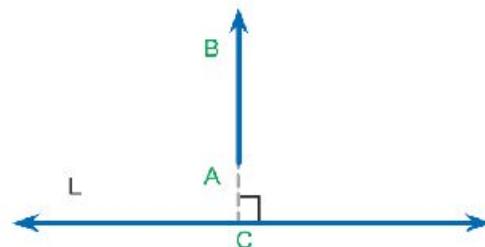
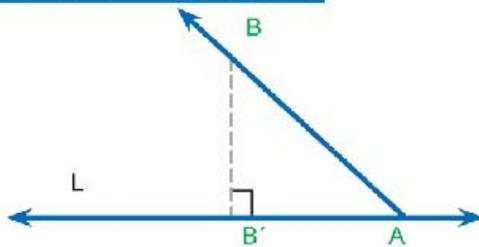
**Si**  $D \in \vec{AB}$  ,  $D \notin \vec{AB}$

**et si**  $D'$  est la projection du point D sur la droite L,  
**alors**  $D' \in \vec{A'B'}$ .



$\therefore$  la projection de  $\vec{AB}$  sur la droite L est  $\vec{A'B'}$  :

**Observe et complète :**



La projection de  $\vec{AB}$  sur la droite L est ..... Si  $\vec{AB} \perp L$ , alors la projection de  $\vec{AB}$  sur la droite L est .....

**Réfléchissons :**

- A** Quelle est la forme de la projection d'une droite sur une autre droite ?
- B** La projection d'une droite sur une autre droite peut-elle être un point ?
- C** Justifie ta réponse en dessinant des formes différentes de la projection d'une droite sur une autre. Conserve ces dessins dans ton portfolio.

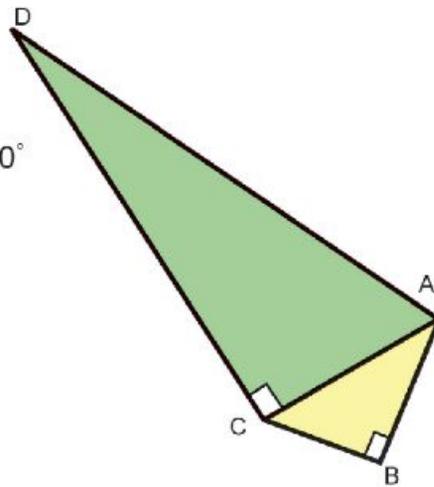




### Pour s'entraîner (1) :

Dans la figure ci-contre :  $m(\angle B) = m(\angle ACD) = 90^\circ$   
Complète :

- A La projection de  $\overline{AD}$  sur  $\overleftrightarrow{CD}$  est .....
- B La projection de  $\overline{AC}$  sur  $\overleftrightarrow{CD}$  est .....
- C La projection de  $\overline{AC}$  sur  $\overleftrightarrow{AB}$  est .....



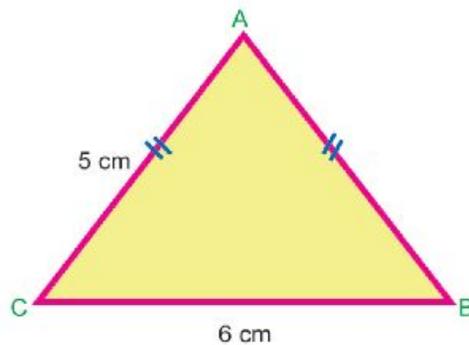
### Pour s'entraîner (2) :

Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle tel que  $AB = AC = 5$  cm,  
 $BC = 6$  cm.

Trouve :

- A la longueur de la projection de  $\overline{AB}$  sur  $\overleftrightarrow{BC}$ .
- B l'aire du triangle ABC.



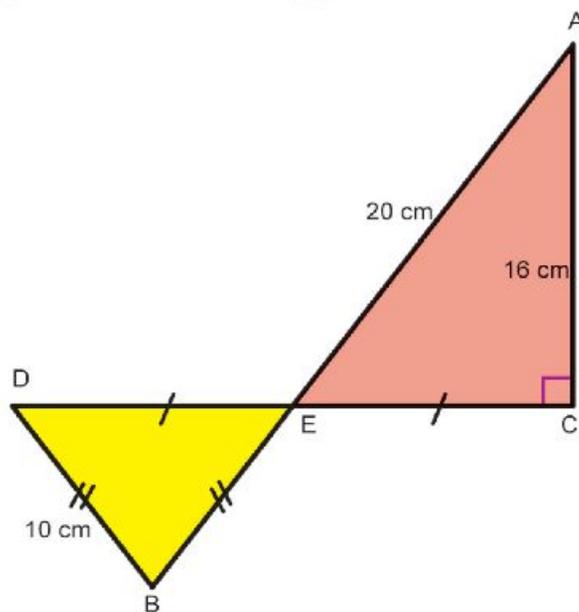
### Pour s'entraîner (3) :

Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ , E est le milieu de  $\overline{CD}$ ,

$AC = 16$  cm,  $AE = 20$  cm,

$BD = BE = 10$  cm.



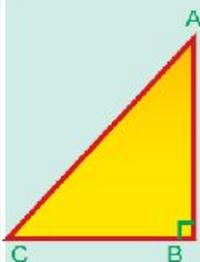
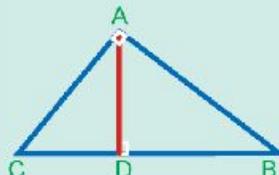
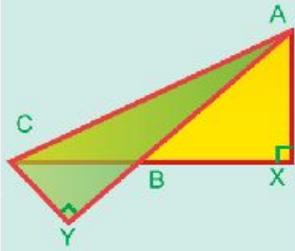
Trouve :

- A la longueur de la projection de  $\overline{BD}$  sur  $\overleftrightarrow{CD}$ .
- B la longueur de la projection de  $\overline{AB}$  sur  $\overleftrightarrow{CD}$ .



Exercices (5 – 3)

1 Complète le tableau suivant :

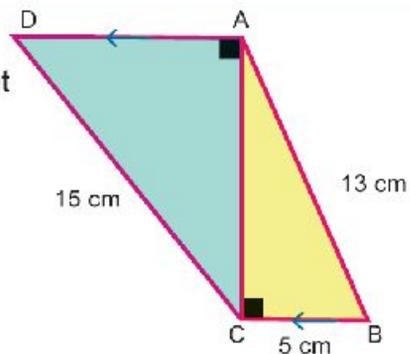
Figure			
Projection			
La projection de $\overline{AC}$ sur $\overleftrightarrow{BC}$	.....	.....	$\overline{XC}$
La projection de $\overline{AB}$ sur $\overleftrightarrow{BC}$	.....	.....	.....
La projection de $\overline{AC}$ sur $\overleftrightarrow{AB}$	.....	.....	.....
La projection de $\overline{BC}$ sur $\overleftrightarrow{AB}$	.....	.....	.....

2 Dans la figure ci-contre :

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ,  $AB = 13$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CD = 15$  cm et  $m(\angle ACB) = m(\angle DAC) = 90^\circ$

Trouve :

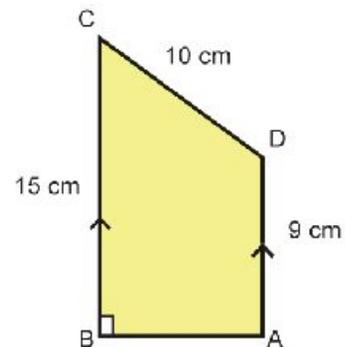
- A la longueur de la projection de  $\overline{AB}$  sur  $\overleftrightarrow{AC}$ .
- B la longueur de la projection de  $\overline{CD}$  sur  $\overleftrightarrow{AD}$ .



3 Dans la figure ci-contre :

ABCD est un trapèze tel que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  et  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ . Si  $AD = 9$  cm,  $DC = 10$  cm, et  $CB = 15$  cm, trouve :

- A la longueur de la projection de  $\overline{DC}$  sur  $\overleftrightarrow{BC}$
- B la longueur de la projection de  $\overline{DC}$  sur  $\overleftrightarrow{AB}$



# Unité 5

## Leçon 4

# Théorème d'Euclide

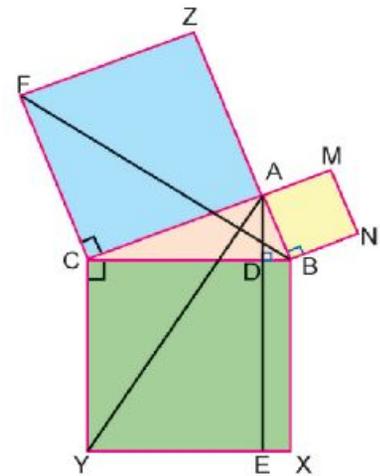
### Réfléchis et discute

#### À apprendre :

- » Le théorème d'Euclide.
- » Applications sur le théorème d'Euclide.

Dans la figure ci-contre :

- 1 ABC est un triangle rectangle en A. Les carrés ABNM, ACFZ et BXYC sont construits sur ses côtés.
- 2 Trace  $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$  qui le coupe en D et qui coupe  $\overline{XY}$  en E. Trace  $\overline{BF}$  et  $\overline{AY}$  comme dans la figure.



#### Remarque que :

$$m(\angle BCF) = m(\angle YCA)$$

$$\triangle BCF = \triangle YCA$$

Pourquoi?

$$\text{aire du triangle } BCF = \frac{1}{2} \text{ aire du carré } ACFZ.$$

Pourquoi?

$$\text{aire du triangle } YCA = \frac{1}{2} \text{ aire du rectangle } EYCD.$$

Pourquoi?

Donc l'aire du carré ACFZ = l'aire du rectangle EYCD

$$AC^2 = CD \times CY$$

Pourquoi ?

$$\therefore AC^2 = CD \times CB$$

= la longueur de la projection de  $\overline{AC}$   $\times$  la longueur de l'hypoténuse  $\overline{BC}$



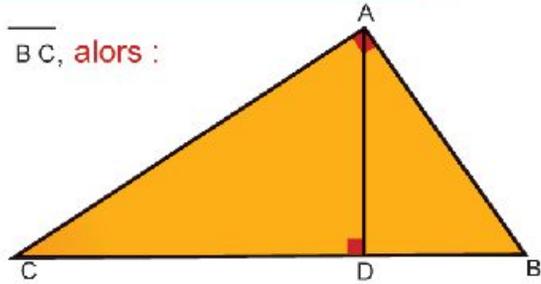
**Théorème d'Euclide :**

L'aire du carré construit sur l'un des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle est égale à l'aire du rectangle ayant pour dimensions la longueur de la projection du côté sur l'hypoténuse et l'hypoténuse.

Dans le triangle ABC rectangle en A, si  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ , alors :

$$BA^2 = BD \times BC$$

$$CA^2 = CD \times CB$$



**Corollaire :**

$$(AD)^2 = DB \times DC$$



**Pour s'entraîner :**

Dans la figure ci-contre :

DEF est un triangle rectangle en D,  $\overline{DN} \perp \overline{EF}$ ,

EN = 9 cm et NF = 16 cm

Complète :

$$DE^2 = EN \times EF$$

(Euclide)

$$= \dots \times \dots$$

$$\therefore DE = \dots \text{ cm}$$

$$DF^2 = FN \times \dots$$

(Euclide)

$$= \dots \times \dots$$

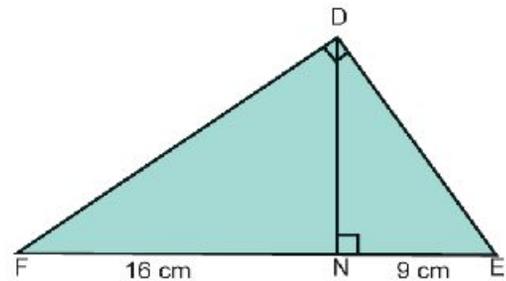
$$\therefore DF = \dots \text{ cm}$$

$$DN^2 = NE \times NF$$

(.....)

$$= \dots \times \dots$$

$$\therefore DN = \dots \text{ cm}$$



**Réfléchissons :**

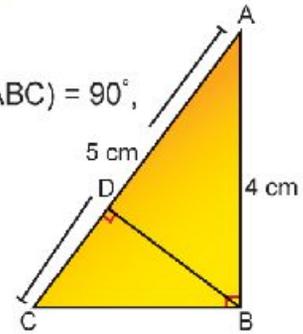
A-t-on  $DN \times EF = DE \times DF$  ? Pourquoi ?



## Exercices (5 – 4)

- 1 Dans la figure ci-contre :  $ABC$  est un triangle tel que,  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ ,  
 $AB = 4$  cm,  $AC = 5$  cm et  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ . **Complète :**

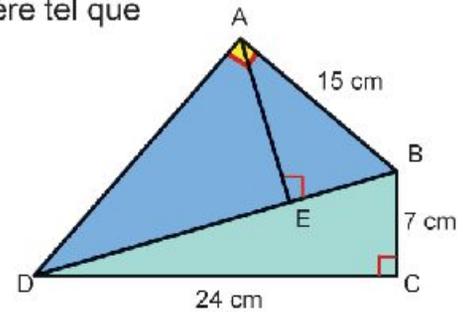
- ◆ A  $BC = \dots\dots$  cm      ◆ B  $AD = \dots\dots$  cm  
◆ C  $BD = \dots\dots$  cm      ◆ D l'aire du  $\triangle DBC = \dots\dots$  cm<sup>2</sup>



- 2 Dans la figure ci-contre :  $ABCD$  est un quadrilatère tel que  
 $m(\angle BCD) = m(\angle BAD) = 90^\circ$ ,  
 $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ ,  $BC = 7$  cm,  $CD = 24$  cm et  $AB = 15$  cm

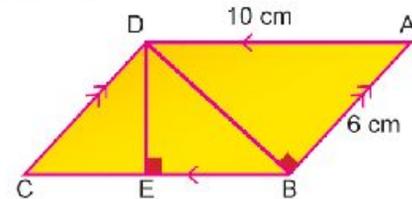
**Trouve :**

- ◆ A les longueurs de  $\overline{BD}$  et  $\overline{AD}$   
◆ B la longueur de la projection de  $\overline{AB}$  sur  $\overleftrightarrow{BD}$   
◆ C la longueur de la projection de  $\overline{AD}$  sur  $\overleftrightarrow{AE}$



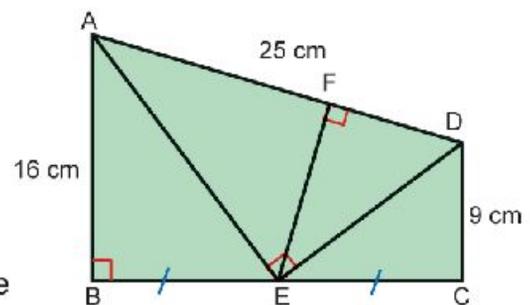
- 3 Dans la figure ci-contre :  $ABCD$  est un parallélogramme,  
 $AB = 6$  cm,  $AD = 10$  cm,  $\overline{DB} \perp \overline{AB}$  et  
 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ . **Calcule :**

- ◆ A l'aire du parallélogramme  $ABCD$ .  
◆ B la longueur de la projection de  $\overline{DB}$  sur  $\overleftrightarrow{BC}$ .  
◆ C la longueur de  $\overline{DE}$ .



- 4 Dans la figure ci-contre :  $ABCD$  est un trapèze  
 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ,  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ ,  
 $E$  est le milieu de  $\overline{BC}$ ,  $AB = 16$  cm,  
 $AD = 25$  cm,  $DC = 9$  cm,  $\overline{AE} \perp \overline{ED}$   
 et  $\overline{EF} \perp \overline{AD}$

- Calcule :** ◆ A l'aire du trapèze  $ABCD$ .  
◆ B la longueur de la projection de  $\overline{AE}$  sur  $\overleftrightarrow{AD}$ .



# Identification d'un triangle selon ses angles

Unité 5

Leçon 5

Réfléchis et discute

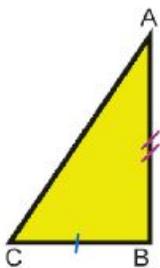


Figure (1)  
 $\angle B$  est droit

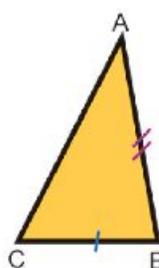


Figure (2)  
 $\angle B$  est aigu

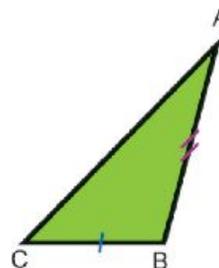


Figure (3)  
 $\angle B$  est obtus

**Remarque que :** dans les trois figures, les trois segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  et  $\overline{AC}$  sont de même longueur. Est-ce que la longueur de  $\overline{AC}$  varie selon la mesure de l'angle qui lui est opposé ?

Complète par un signe convenable  $>$ ,  $=$ ,  $<$

Dans la figure (1)  $\because m(\angle B) = 90^\circ \therefore AB^2 + BC^2 \dots\dots\dots AC^2$

Dans la figure (2)  $\because m(\angle B) < 90^\circ \therefore AB^2 + BC^2 \dots\dots\dots AC^2$

Dans la figure (3)  $\because m(\angle B) > 90^\circ \therefore AB^2 + BC^2 \dots\dots\dots AC^2$

Dans quel cas a-t-on  $m(\angle B) = 90^\circ$  ?

**Détermination de la nature d'un triangle par rapport à ces angles en connaissant les longueurs de ses côtés :**

On compare le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle et la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

**À apprendre :**

- » Identification d'un triangle selon ses angles

**Expressions de base :**

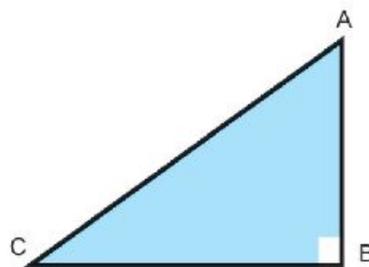
- » un triangle rectangle
- » un triangle acutangle
- » un triangle obtusangle



(1) Si le carré de la longueur du plus grand côté du triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Dans le triangle ABC :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

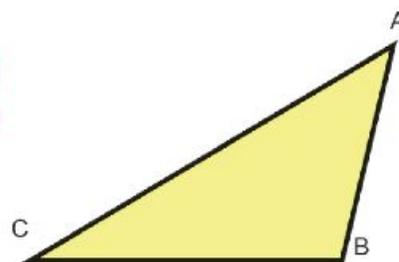
∴ l'angle B est droit.



(2) Si le carré de la longueur du plus grand côté du triangle est plus grand que la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est obtusangle.

Dans le triangle ABC :  $(AC)^2 > (AB)^2 + (BC)^2$

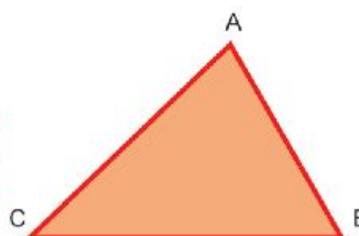
∴ l'angle B est obtus.



(3) Si le carré de la longueur du plus grand côté du triangle est plus petit que la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est acutangle.

Dans le triangle  $(AC)^2 < (AB)^2 + (BC)^2$

∴ l'angle B est aigu.



**Exemple :**

Détermine la nature du plus grand angle du triangle ABC, si  $AB = 8$  cm,  $BC = 10$  cm et  $CA = 7$  cm.

Quelle est la nature du triangle ABC par rapport à ces angles ?

**Solution**

∴ Le plus grand angle dans un triangle est opposé au plus long côté.

∴ l'angle A est le grand angle du triangle car il est opposé à  $\overline{BC}$ .

$BC^2 = 10^2 = 100$



$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (8)^2 + (7)^2 \\ &= 64 + 49 = 113 \end{aligned}$$

$\therefore (BC)^2 < (AB)^2 + (AC)^2 \quad \therefore$  l'angle B est aigu

$\therefore \angle A$  est le plus grand angle du triangle

$\therefore \triangle ABC$  est acutangle

## Exercices (5 – 5)

Détermine la nature de l'angle A (aigu ou droit ou obtus) dans le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

- A** AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 6 cm
- B** AB = 12 cm, BC = 13 cm, AC = 7 cm
- C** AB = 3 cm, BC = 7 cm, AC = 5 cm

## Exercices généraux

**1** Détermine la nature de l'angle de la plus grande mesure dans le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

- A** AB = 9 cm, BC = 10 cm, AC = 12 cm.
- B** AB = 5 cm, BC = 12 cm, AC = 13 cm.
- C** AB = 7 cm, BC = 16 cm, AC = 14 cm.

Quelle est la nature du triangle par rapport à ces angles dans chaque cas ?

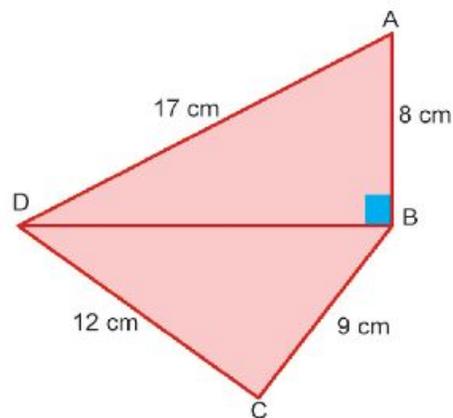
**2** Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère tel que

AB = 8 cm, BC = 9 cm,

CD = 12 cm, AD = 17 cm et  $\overline{DB} \perp \overline{AB}$ .

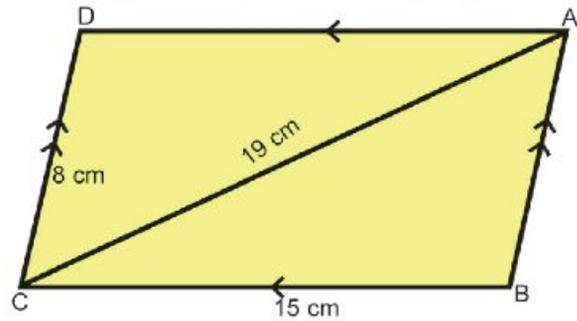
- A** Calcule la longueur de la projection de  $\overline{AD}$  sur  $\overline{BD}$
- B** Quelle est la nature du triangle BCD par rapport à ces angles ?



3 Dans la figure ci-contre :

ABCD est un parallélogramme tel que  $BC = 15 \text{ cm}$ ,  $CD = 8 \text{ cm}$ ,  $AC = 19 \text{ cm}$ .

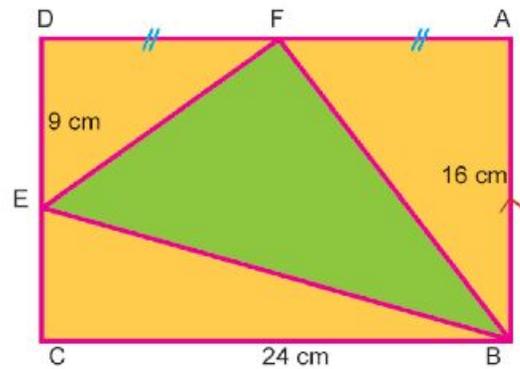
Démontre que  $\angle B$  est obtus.



4 ABC est un triangle tel que :  $AB^2 > AC^2 + BC^2$ ,  $AB = 15 \text{ cm}$ ,  $AC = 13 \text{ cm}$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  qui le coupe en D. Si  $AD = 12 \text{ cm}$ , trouve la longueur de  $\overline{BC}$ .

5 Dans la figure ci-contre :

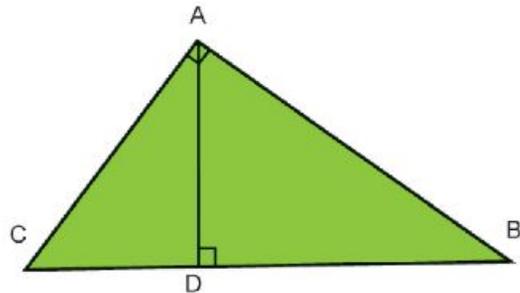
ABCD est un rectangle tel que  $AB = 16 \text{ cm}$  et  $BC = 24 \text{ cm}$ .  $E \in \overline{CD}$ , tel que  $DE = 9 \text{ cm}$ . Quelle est la nature du triangle BFE par rapport à ses angles ?



6 Dans la figure ci-contre :

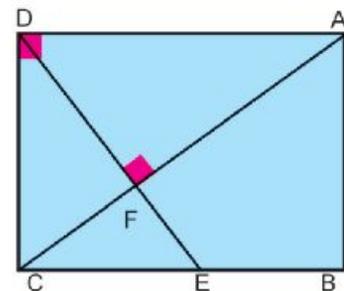
ABC est un triangle,  $m(\angle BAC) = 90^\circ$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ,  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $AC = 6 \text{ cm}$ .

Trouve BD, CD et AD.



7 ABCD est un rectangle tel que  $AB = 30 \text{ cm}$ ,  $AD = 40 \text{ cm}$ ,  $\overline{DE} \perp \overline{AC}$  qui coupe  $\overline{AC}$  en F et  $\overline{BC}$  en E.

Trouve la longueur de  $\overline{AF}$ ,  $\overline{DF}$  et  $\overline{EC}$ .



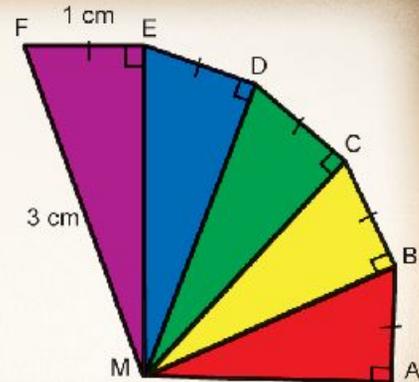
### Activité

Dans la figure ci-contre :

$$AB = BC = CD = DE = EF = 3 \text{ cm}$$

Trouve :

- A la longueur de la projection de  $\overline{FM}$  sur  $\overline{EM}$ .
- B la longueur de la projection de  $\overline{BM}$  sur  $\overline{AM}$ .

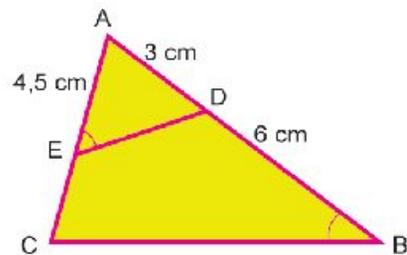


### Epreuve de l'unité

1 Dans la figure ci-contre :

$m(\angle AED) = m(\angle B)$ .  $AD = 3 \text{ cm}$ ,  $AE = 4,5 \text{ cm}$ ,  
 $BD = 6 \text{ cm}$ .

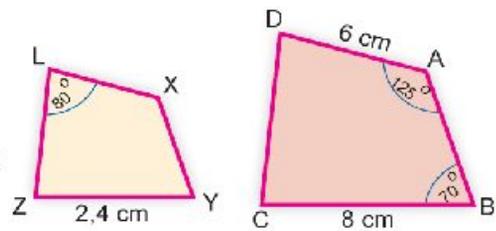
- a) Démontre que  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$
- b) Trouve la longueur de  $\overline{EC}$



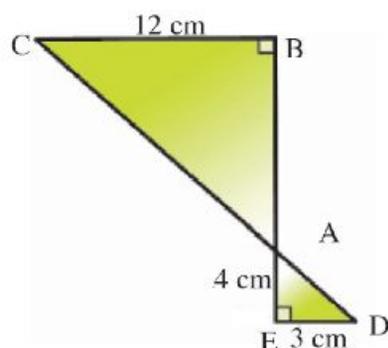
2 Dans la figure ci-contre :

la figure  $ABCD \sim$  la figure  $XYZL$ .

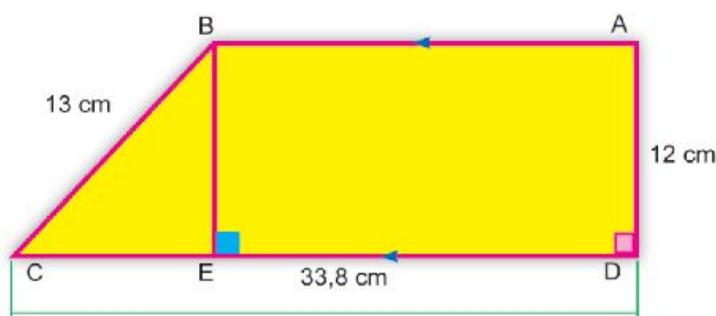
- A Calcule  $m(\angle BCD)$
- B Calcule la longueur de  $\overline{XL}$  et le rapport d'agrandissement.
- C Si le périmètre de la figure  $ABCD = 26 \text{ cm}$ , quel est le périmètre de la figure  $XYZL$  ?



- 3 Dans la figure ci-contre,  
 $\overline{BE} \cap \overline{DC} = \{A\}$ ,  
 $m(\angle B) = m(\angle E) = 90^\circ$ ,  
 a) Démontre  $\triangle ABC \sim \triangle AED$   
 b) calcule BA;



- 4 Dans la figure ci-contre :  
 ABCD est un trapèze tel que  
 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ ,  
 $AD = 12 \text{ cm}$ ,  $BC = 13 \text{ cm}$ ,  
 $DC = 33,8 \text{ cm}$  et  $\overline{BE} \perp \overline{DC}$ .



A) Trouve :

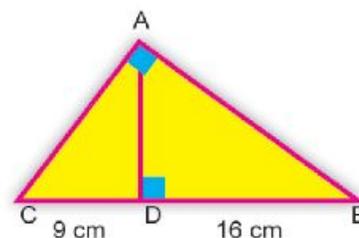
- A La longueur de  $\overline{CE}$  et  $\overline{AB}$ .
- B La longueur de  $\overline{DB}$
- C la longueur de la projection de  $\overline{DC}$  sur  $\overline{AB}$
- D l'aire du trapèze ABCD.

B) Démontre que :  $m(\angle DBC) = 90^\circ$

- 5 Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle rectangle en A,  
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ,  $BD = 16 \text{ cm}$ ,  $CD = 9 \text{ cm}$ .

Trouve la longueur de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AD}$ ,  
 puis calcule l'aire du triangle ABC.



## Modèles des examens d'algèbre et de probabilité

## Modèle (1)

**[1] Complète ce qui suit :**

- (1) Si  $2^{x+3} = 1$  ; alors  $x = \dots\dots\dots$
- (2) Si  $x + y = 4$  et  $x - y = 2$ , alors  $x^2 - y^2 = \dots$
- (3) L'ensemble solution, dans  $\mathbb{Z}_+$ , de l'équation  $x^2 - 1 = 8$  est ...
- (4) Si  $2^x = 3$ , alors  $8^{-x} = \dots$
- (5)  $1 - \frac{3}{4} = \dots\dots\dots\%$

**[2] Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :**

- (1)  $\frac{5^{-2} \times \sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \dots\dots\dots$   
 (a)  $\frac{1}{125}$  (b)  $\frac{1}{25}$  (c) 25 (d) 125
- (2)  $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}^- = \dots\dots\dots$   
 (a)  $\mathbb{Z}^+$  (b)  $\mathbb{N}$  (c)  $\emptyset$  (d)  $\{0\}$
- (3) Soit un cube de 3 cm d'arête alors son volume =  $\dots\dots\dots\text{cm}^3$   
 (a) 9 (b) 12 (c) 27 (d) 81
- (4) Si l'expression  $x^2 + kx + 36$  est un carré parfait, alors  $k = \dots\dots\dots$   
 (a)  $\pm 6$  (b)  $\pm 8$  (c)  $\pm 12$  (d)  $\pm 18$
- (5) Si on jette un dé une seule fois et on note le nombre qui apparaît sur la face supérieure, alors la probabilité pour que le nombre apparu soit divisible par 3 est  
 (a)  $\frac{1}{4}$  (b)  $\frac{1}{3}$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{3}{4}$
- (6) Si  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{27}{125}\right)$  ; alors  $x = \dots\dots\dots$   
 (a) -5 (b) -3 (c) 3 (d) 5

**[3] Factorise les expressions suivantes :**

- a)  $x^2 + 8x + 15$  (b)  $2x^2 + 7x + 3$   
 c)  $x^3 - 1$  (d)  $ax - 7a + 3x - 21$

[4] a) Ecris  $\frac{4^n \times 6^{2n}}{2^{4n} \times 3^{2n}}$  sous la forme la plus simple :

b) Détermine l'ensemble solution, dans  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .





[5]a) Une boîte contient des boules de même volume et de couleurs différentes. 5 sont blanches et les boules restantes sont rouges. On tire au hasard une boule. Si la probabilité pour que la boule tirée soit rouge est  $\frac{2}{3}$ , calcule le nombre de boules dans la boîte.

b) Soient  $3^x = 27$  et  $4^{x+y} = 1$ , détermine la valeur de  $x$  et de  $y$ .

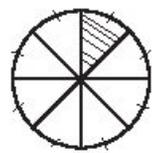
**Modèle (2)**

[1] *Complète ce qui suit :*

- (1) Si  $7^{x-1} = 3^{x-1}$  ; alors  $x = \dots\dots\dots$
- (2)  $x^3 - \dots = (x-2)(\dots + 2x + 4)$
- (3)  $(5x - 2y)(25x^2 + 10xy + 4y^2) = \dots$
- (4) Si  $\frac{2x}{5} = 6$  ; alors  $x = \dots\dots\dots$
- (5) Un sac contient 9 cartes numérotées de 1 à 9. Si On tire au hasard une carte, alors la probabilité pour que la carte tirée porte un nombre impair premier, est ...

[2] *Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :*

- (1) Si  $x^3 y^{-3} = 8$ , alors la valeur de  $\frac{y}{x} = \dots$ 
  - (a) 8
  - (b)  $\frac{1}{8}$
  - (c)  $\frac{1}{2}$
  - (d) 2
- (2) Si l'expression  $x^2 + 4x + a$  est un carré parfait, alors  $a = \dots\dots\dots$ 
  - (a) 3
  - (b) 4
  - (c) 8
  - (d) 16
- (3) L'ensemble solution, dans  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $x^2 - x = 0$  est
  - (a) {0}
  - (b)  $\emptyset$
  - (c) {0 ; 1}
  - (d) {1}
- (4) Dans la figure ci-contre la partie achurée représente  $\dots\dots\dots$  du cercle
  - (a)  $\frac{1}{8}$
  - (b)  $\frac{1}{6}$
  - (c)  $\frac{1}{4}$
  - (d)  $\frac{1}{3}$
- (5) Si  $3^x + 3^x + 3^x = 1$  ; alors  $x = \dots\dots\dots$ 
  - (a) -1
  - (b) 0
  - (c)  $\frac{1}{3}$
  - (d) 1
- (6) Si  $6^x = 11$  ; alors  $6^{x+1} = \dots\dots\dots$ 
  - (a) 12
  - (b) 22
  - (c) 66
  - (d) 72



[3] Factorise les expressions suivantes :

- |               |                    |
|---------------|--------------------|
| a) $4x^2 - 9$ | b) $x^3 + 8$       |
| c) $x^2 - 5x$ | d) $x^2 - 7x + 12$ |



[4]a) Détermine l'ensemble solution, dans  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $x^2 - x - 6 = 0$  est

b) Simplifie sous la forme la plus simple :  $\frac{(\sqrt{2})^5 \times (3)^2}{3 \times (\sqrt{2})^9}$

[5]a) Si  $\frac{2^x \times 3^x}{(12)^x} = \frac{1}{2}$  ; trouve la valeur de  $x$

b) Une boîte contient des boules de même volume et de couleurs différentes. 2 sont vertes, 4 sont bleues et les boules restantes sont rouges. On tire au hasard une boule. Si la probabilité pour que la boule tirée soit verte est  $\frac{1}{6}$ , calcule le nombre de boules rouges dans la boîte.

Modèle d'examen d'algèbre pour les élèves intégrés

### Réponds aux questions suivantes :

#### Question (1) Choisis la bonne réponse :

(1) L'ensemble solution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $x^2 + 25 = 0$  est :

- (a)  $\pm 5$                       (b) 5                      (c)  $-5$                       (d)  $\emptyset$

(2) Si l'expression  $x^2 + a x + 9$  est un carré parfait, alors  $a = \dots\dots\dots$

- (a) 3                      (b) 6                      (c) 9                      (d) 18

(3) Si l'un des facteurs de l'expression  $x^2 - 4 x + 3$  est  $(x - 1)$ , alors l'autre facteur est ...

- (a)  $(x + 3)$                       (b)  $(x + 1)$                       (c)  $(x - 3)$                       (d)  $(x - 4)$

(4) Si  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ , alors  $x = \dots$

- (a) -2                      (b) 2                      (c)  $\frac{1}{2}$                       (d)  $-\frac{1}{2}$

(5) La probabilité de l'évènement certain = .....

- (a) zéro                      (b)  $\frac{1}{2}$                       (c) 1                      (d) 2

#### Question (2) : Relie la colonne (A) avec ce qui convient de la colonne (B)

A	B
(1) Si $a^2 - b^2 = 15$ , $a + b = 3$ ; alors $a - b = \dots\dots\dots$	5
(2) Si on choisit un chiffre du nombre 37450, alors la probabilité pour que le chiffre choisis soit pair, est ...	6
(3) Si $(x + 3y)^2 = x^2 + k xy + y^2$ , alors $k = \dots$	$\frac{2}{5}$
(4) $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = \dots\dots\dots$	zéro
(5) La probabilité de l'évènement impossible = .....	$4^4$



**Question (3) Complète ce qui suit :**

(1)  $x^2 - y^2 = ( \dots - \dots ) ( \dots + \dots )$

(2)  $x^3 - 8 = ( \dots - \dots ) ( x^2 + 2x + \dots )$

(3)  $x^2 - 5x + 6 = (x - \dots) ( \dots - 3)$

(4)  $(a + b)x + (a + b)y = (a + \dots) ( \dots + \dots )$

**Question (4) : Met le signe (✓) ou (X)**

(1) Dans une école mixte, il y a 320 élèves. On choisit au hasard un élève de cette école. Si la probabilité pour que cet élève choisi soit un garçon est 0,6, alors le nombre de filles dans cette école est 128 ( )

(2) Si  $3^x = 27$  ; alors  $x = \frac{1}{3}$  ( )

(3) On tire au hasard une carte, parmi des cartes numérotées de 1 à 10. alors la probabilité pour que la carte tirée porte un nombre impair supérieur à 3, est  $\frac{3}{10}$ . ( )

(4) Le nombre réel positif quand on ajoute son carré à son triple on obtient 28 est 4. ( )

(5) L'ensemble solution dans R de l'équation :  $x(x - 3)(x + 5) = 0$  est  $\{0 ; 3 ; -5\}$  ( )

**Question (5) : Complète la solution pour simplifier l'expression  $\frac{4^n \times 6^{2n}}{2^{4n} \times 3^{2n}}$**

$$\begin{aligned} &= \frac{(2^{\dots})^n \times (\dots \times 3)^{2n}}{2^{4n} \times 3^{2n}} = \frac{2^{\dots} \times (\dots)^{2n} \times 3^{2n}}{2^{4n} \times 3^{2n}} \\ &= 2^{\dots+2n-\dots} \times 3^{2n-\dots} = 2^{\dots} \times 3^{\dots} = \dots \end{aligned}$$

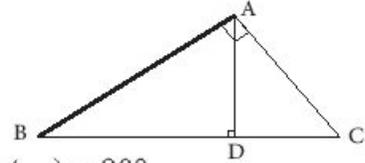


## Modèles des examens de la géométrie

## Modèle (1)

**[1] Complète ce qui suit :**

- (1) Dans la figure ci-contre  
 $AB \times \dots = BC \times AD$
- (2) Dans un triangle ABC, si  $(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$ , alors  $m(\angle \dots) = 90^\circ$
- (3) La projection du point  $A \in$  à une droite « L » sur la droite « L » est ....
- (4) Soit un cercle de diamètre 14 cm ; alors son aire = .....  $\text{cm}^2$  ( $\pi \approx \frac{22}{7}$ )
- (5) Les longueurs des deux bases parallèles d'un trapèze sont 8 cm ; 10 cm et la hauteur mesure 5 cm, alors son aire mesure ...  $\text{cm}^2$

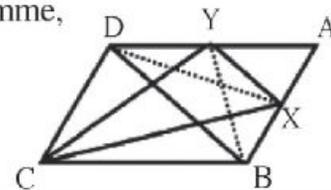
**[2] Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :**

- (1) ABC est un triangle tel que  $(AB)^2 > (BC)^2 + (AC)^2$ , alors  $\angle C$  est ...  
 (a) aigu (b) droit (c) obtus (d) plat
- (2) Les diagonales d'un losange sont 6 cm et 10 cm, alors son aire est égale à =  
 ...  $\text{cm}^2$   
 (a) 60 (b) 30 (c) 15 (d) 10
- (3) Si le rapport entre les longueurs de deux côtés correspondants de deux polygones semblables est 3 : 5, alors le rapport entre leurs périmètres est .....  
 (a) 25 (b) 5 : 3 (c) 3 : 5 (d) 1 : 2
- (4) L'aire d'un trapèze est de  $100 \text{ cm}^2$ . Si la hauteur mesure 5 cm, alors la longueur de la base moyenne est ... cm  
 (a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50
- (5) ABCD est un parallélogramme tel que  $m(\angle A) = 70^\circ$  ; alors  $m(\angle B) = \dots\dots\dots^\circ$   
 (a)  $70^\circ$  (b)  $110^\circ$  (c)  $180^\circ$  (d)  $360^\circ$
- (6) La mesure d'un angle d'un pentagone régulier est égale à ..... $^\circ$   
 (a) 90 (b) 108 (c) 120 (d) 540

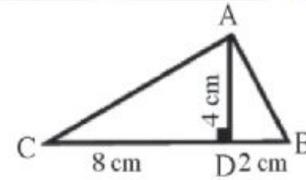
- [3]a) Si les longueurs des côtés de l'un de deux triangles semblables sont 3 cm, 4 cm, 5 cm et le périmètre de l'autre est 36 cm. Calcule les longueurs des côtés de l'autre triangle.

- b) Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme,  
 $X \in \overline{AB}$  et  $Y \in \overline{AD}$  tels que  
 aire de  $\triangle CBX =$  aire de  $\triangle CYD$ .

Démontre que  $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ .

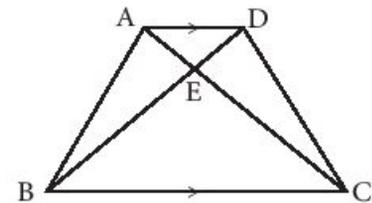


- [4]a) Dans la figure ci-contre,  
 $ABC$  est un triangle,  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ,  
 $BD = 2$  cm,  $CD = 8$  cm et  $AD = 4$  cm.  
 Démontre que  $m(\angle BAC) = 90^\circ$ .



- b)  $ABCD$  est un parallélogramme tel que  $AB = 18$  cm,  $DE = 15$  cm et  $BC = 12$  cm.  
 On trace  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$  et  $\overline{DF} \perp \overline{AB}$  tels que  $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \{E\}$  et  $\overline{DF} \cap \overline{AB} = \{F\}$ .  
 Calcule l'aire du parallélogramme  $ABCD$  et la longueur de  $\overline{DF}$ .
- [5]a)  $ABC$  est triangle tel que  $m(\angle A) = 50^\circ$ ,  $m(\angle B) = 60^\circ$ ; Mets les côtés du triangle dans l'ordre décroissant

- b) Dans la figure ci-contre  
 $ABCD$  est un quadrilatère tel que  
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ;  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$   
 Démontre que  
 L'aire du  $\triangle ABE =$  L'aire du  $\triangle DCE$ .



### Modèle (2)

#### [1] Complète ce qui suit :

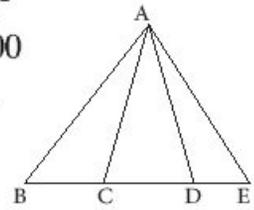
- (1) Deux polygones sont semblables si les côtés correspondants sont ..... et les angles correspondants ont .....
- (2) L'aire d'un losange est  $24 \text{ cm}^2$ . La longueur de l'une de ses diagonales est 8 cm, alors la longueur de l'autre diagonale est ... cm
- (3) Dans un triangle  $ABC$ , si  $(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$ , alors  $ABC$  est un triangle rectangle en ....
- (4) Les longueurs 6 cm, 8 cm et 11 cm peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle ...
- (5) Aire d'un triangle =  $\frac{1}{2}$  aire du parallélogramme qui a une base commune avec le triangle et .....

#### [2] Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :

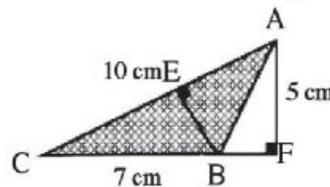
- (1) Si les longueurs des deux bases parallèles d'un trapèze sont 6 cm et 8 cm, alors la longueur de sa base moyenne est ... cm  
 (a) 48                      (b) 24                      (c) 14                      (d) 7
- (2) Si le rapport des périmètre de deux polygones semblables est 1 : 3 et le périmètre du plus petit polygone est 15 cm, alors le périmètre du plus grand polygone est .. cm  
 (a) 30                      (b) 45                      (c) 60                      (d) 75



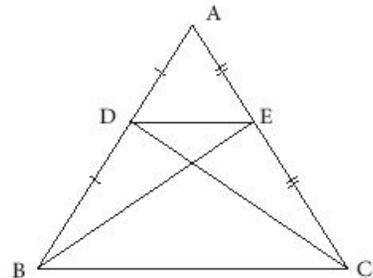
- (3) L'aire d'un triangle est  $24 \text{ cm}^2$  et une de ses hauteurs mesure  $8 \text{ cm}$ . La longueur de la base correspondante à cette hauteur est égale à .... cm  
 (a) 16 (b) 6 (c) 3 (d) 2
- (4) ABC est un triangle rectangle en B,  $\overline{BD} \perp \overline{BC}$  tel que  $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ . Alors la projection de  $\overline{BD}$  sur  $\overline{AC}$  est ....  
 (a) {A} (b) {B} (c) {C} (d) {D}
- (5) Si le périmètre d'un carré est  $20 \text{ cm}$ , alors son aire mesure ....  $\text{cm}^2$   
 (a) 20 (b) 25 (c) 50 (d) 100
- (6) Le nombre de triangles dans la figure ci-contre est .....  
 (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6



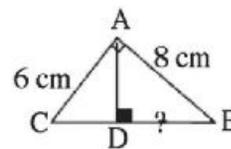
- [3] Dans la figure ci-contre,  
 $\overline{AF} \perp \overline{CB}$ ,  $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ,  
 $AC = 10 \text{ cm}$ ,  $BC = 7 \text{ cm}$  et  $AF = 5 \text{ cm}$ .  
 Détermine 1) la longueur de  $\overline{BE}$   
 2) Aire ( $\Delta ABC$ ).



- [4] a) ABCD est un parallélogramme tel que  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $AC = 20 \text{ cm}$  et  $BD = 12 \text{ cm}$ .  
 Démontre que  $m(\angle ABD) = 90^\circ$ , puis détermine l'aire du parallélogramme ABCD.
- b) Dans la figure ci-contre,  
 ABC est un triangle tel que D est le milieu de  $\overline{AB}$   
 et E est le milieu de  $\overline{AC}$   
 Démontre que  
 (I) l'aire du triangle DBC = l'aire du triangle EBC  
 (II)  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

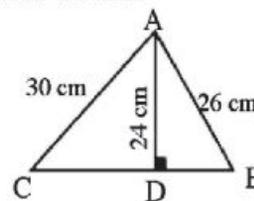


- [5] a) Dans la figure ci-contre,  
 $\Delta DBA \sim \Delta ABC$ ,  $m(\angle BAC) = 90^\circ$ .  
 Démontre que  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .



Si  $AB = 8 \text{ cm}$  et  $AC = 6 \text{ cm}$ , détermine la longueur de  $\overline{BD}$

- b) Dans la figure ci-contre,  
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ,  
 Si  $AD = 24 \text{ cm}$ ,  $AB = 26 \text{ cm}$  et  $AC = 30 \text{ cm}$ ,  
 détermine BC et calcule l'aire de  $\Delta ABC$ .



**Réponds aux questions suivantes :**

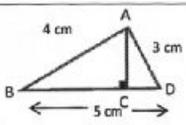
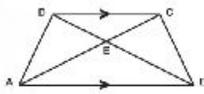
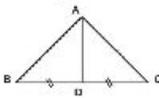
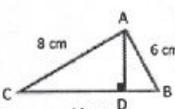
**Question (1) Choisis la bonne réponse :**

- (1) L'aire d'un parallélogramme dont les longueurs de sa base est 6 cm et la hauteur correspondante à cette base mesure 4 cm, est ..... cm<sup>2</sup> ( 12 ; 20 ; 24 ; 48)
- (2) Le triangle dont les côtés mesurent 6 cm , 8 cm et 10 cm est un triangle .....  
(acute angle ; rectangle ; obtusangle ; autrement)
- (3) L'aire d'un losange, dont les longueurs des diagonales sont 6 cm et 10 cm, est égale à ... cm<sup>2</sup>  
( 60 ; 30 ; 15 ; 10)
- (4) La hauteur d'un trapèze dont l'aire est égale à 65 cm<sup>2</sup> et sa base moyenne mesure 8 cm est égale à ... cm ( 32 ; 24 ; 48 ; 7)
- (5) Tout les ..... sont semblables. (Carrées ; triangles ; rectangles ; parallélogrammes)

**Question (2) Complète ce qui suit:**

- (1) La projection d'un point sur une droite est .....
- (2) Si ABC est un triangle obtusangle en B, alors  $(AC)^2$  .....  $(AB)^2 + (BC)^2$
- (3) L'aire d'un carré de 8 cm de diagonal = ..... cm<sup>2</sup>
- (4) Les deux triangles ont une base commune et leurs sommets opposés à cette base sont situés sur une droite parallèle à cette base, alors ils ont .....
- (5) L'aire d'un triangle =  $\frac{1}{2}$  ..... × la hauteur correspondante.

**Question (3) : Relie de la colonne (A) avec ce qui convient de la colonne (B)**

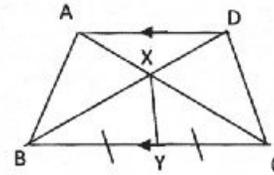
A	B
(1) Dans la figure ci-contre, AC = .... 	BEC
(2) Dans la figure ci-contre : L'aire du Δ AED = L'aire du Δ ..... 	2,4 Superposables
(3) Dans la figure ci-contre : L'aire du Δ ABD = L'aire du Δ ..... 	3,6
(4) Si le rapport de similitude de deux triangles semblables est égale à 1, alors les deux triangles sont .....	ACD
(5) La longueur de la projection de $\overline{AB}$ sur $\overline{BC}$ = ..... cm 	



**Question (4) :** Dans la figure ci-contre,

L'aire de la figure (ABYX) = l'aire de la figure (DCYX)  
 Complète la démonstration

Pour démontrer que  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Hypothèses : .....

Conclusion : .....

Démonstration :  $\overline{XY}$  médiane dans le  $\Delta XBC$

$\therefore \text{aire } \Delta \dots\dots = \text{aire } \Delta \dots\dots \quad (1)$

$\therefore \text{aire de la figure (ABYX)} = \text{aire de la figure (DCYX)} \quad (2)$

De (1) et (2) par soustraction

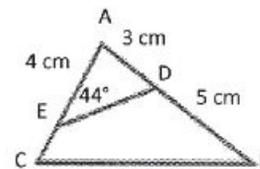
$\therefore \text{aire } \Delta \dots\dots = \text{aire } \Delta \dots\dots$

On ajoutant l'aire du triangle ADX

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

**Question (5) :** Dans la figure ci-contre :

Dans la figure ci-contre,  
 $\Delta ABC \sim \Delta AED$ ,  $m(\angle AED) = 44^\circ$  ;  
 $AD = 3 \text{ cm}$ ,  $AE = 4 \text{ cm}$  et  $BD = 5 \text{ cm}$ ,  
 Complète pour trouver les longueurs de  $\overline{ED}$  et  $\overline{EC}$



Solution :

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta AED$

$\therefore \frac{AB}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{ED} = \frac{CA}{DA} \quad \therefore \frac{8}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{ED} = \frac{CA}{3}$

$\therefore ED = \dots \text{ cm} ; AC = \dots \text{ cm} ; EC = \dots \text{ cm}$



تم الطبع بالشروق الحديثة - القاهرة  
بالمواصفات الفنية الآتية

عدد الصفحات بالغلاف : ١٢٠ صفحة

عدد الملازم بالغلاف : ٧,٥ ملزمة

المقاس :  $٥٧ \frac{1}{8} \times ٨٢$  سم

نوع الورق : لا يقل الداخلى عن ٨٠ جرام والغلاف ٢٠٠ جرام

ألوان الطبع : ٤ لون للداخلى والغلاف

رقم الكتاب : ١٥٥٦/١٠/١٥/٢٢/٢/٢٩

<http://elearning.moe.gov.eg>

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني داخل جمهورية مصر العربية

## **الشروق**

الحديقة للطباعة والتغليف

القاهرة : ٨ شارع سيبيه المصرى - ت : ٢٤٠٢٣٣٩٩ - فاكس : ٢٤٠٣٧٥٦٧ (٠٢)  
مدينة العبور - المنطقة الصناعية