جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

تأليف

أ. عمر فؤاد جاب الله

أد. عفاف أبو الفتوح صالح — د. عصام وصفى روفائيل

أ. محمود ياسر الخطيب — أ. سيرافيم الياس اسكندر

إشراف علمى

أ. جمال الشاهد

مستشار الرياضيات

مراجعة

أ/فتحى أحمد شحاتة — أ/سمير محمد سعداوي

إشراف تربوى

(مركز تطوير المناهج)

٢٠٢٢ - ٢٠٢٣ م

الاسم: ....

الفصل: ....

المدرسة: ....

العنوان: ....

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أبناءنا الأعزاء :

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثانى الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستك للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، ، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعورا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا ، دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية، وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم وما سبق أن تم دراسته فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبًا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة و التدريبات :

يوجد تمارين على كل درس ، وتمارين عامة على الوحدة ، ونشاط خارجى ، واختبار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى اختبارات عامة تساعدك على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لك ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

الوحدة الثانية: العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثالثة: الإحصاء

الوحدة الرابعة: متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

الوحدة الخامسة: التباين

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	⊥	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{أب}}$	القطعة المستقيمة أب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{أب}}$	الشعاع أب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{أب}}$	المستقيم أب
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعى للعدد أ	ق (∠ ل)	قياس زاوية ل
$\sqrt[3]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبى للعدد أ	~	تشابه
[أ ، ب]	فترة مغلقة	<	أكبر من
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	≤	أكبر من أو يساوى
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	>	أقل من
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	≥	أقل من أو يساوى
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ
≡	تطابق		

الوحدة الأولى

١

الأعداد الحقيقية

- الأعدادُ الحقيقيَّة
  - الأعداد النسبيةُ
    - الأعداد الصحيحة
      - الأعداد الصحيحة السالبة
      - الأعداد الطَّبيعية
        - الصفر
        - الأعداد الصَّحيحة الموجبة (أعداد العد)
    - الأعداد غير الصَّحيحة
  - الأعدادُ غير النسبية

مراجعة

فكّر وناقِش

مجموعات الأعداد

مجموعة أعداد العد : ع = {١، ٢، ٣، ...}

مجموعة الأعداد الطّبيعية : ط = {٠، ١، ٢، ٣، ...} = ع ∪ {٠}

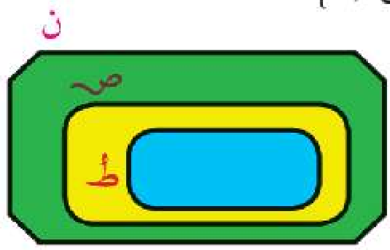
مجموعة الأعداد الصحيحة : صـ = {...، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، ...}

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صـ+ = {١، ٢، ٣، ...} = ع

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة صـ- = {-١، -٢، -٣، ...}

صـ = صـ+ ∪ {٠} ∪ صـ-

مجموعة الأعداد النسبية ن = {$\frac{أ}{ب}$: أ، ب ∈ صـ، ب ≠ ٠}



ط ⊂ صـ ⊂ ن

القيمةُ المطلقةُ للعددِ النسبيِّ:

|-٧| = ٧، |٣| = ٣، |٠| = ٠ ، |-$\frac{٥}{٣}$| = $\frac{٥}{٣}$

إذا كان |أ| = ٥ فإن أ = ±٥

الصورةُ القياسيةُ للعددِ النسبيِّ هي:

أ × ١٠^{ن} حيث ن ∈ صـ ، ١ ≤ |أ| < ١٠

مثلاً العدد $٢٥,٣٢ \times ١٠^{٤}$ في صورته القياسية = $٢,٥٣٢ \times ١٠^{٥}$

$٠,٠٠٠٥٣$ في صورته القياسية = $٥,٣ \times ١٠^{-٤}$

العددُ النسبيُّ المربّع الكامل

هو العددُ الموجبُ الذي يمكن كتابته على صورة مربع عددٍ نسبيٍّ أي (عدد نسبي)^{٢}

مثل ١ ، ٤ ، ٢٥ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، $٢\frac{١}{٤}$ ، ...

العددُ النسبي المكعب الكامل

هو العددُ النسبيُّ الذي يمكن كتابته على صورةٍ مكعب عدد نسبي أي (عدد نسبي)^{٣}

مثل ١ ، ٨ ، -٢٧ ، -٢١٦ ، $\frac{٨}{١٢٥}$ ، ...

الجذرُ التّربيعيُّ للعددِ النّسبي المربع الكامل

- الجذر التربيعيُّ للعددِ النسبي الموجب أ هو العدد الذي مربعه يساوي أ
- $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر
- كلُّ عددٍ نسبيٌّ مربع كامل أ له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعيّ للآخر وهما $\sqrt{أ}$ ، $-\sqrt{أ}$

مثلاً العدد $\frac{١٦}{٢٥}$ له جذران تربيعيان هما $\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$

- $\sqrt{٩}$ يعني الجذر التربيعيّ الموجب للعدد ٩ وهو ٣
- $\sqrt{\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}} = \left|\frac{أ}{ب}\right|$ **أي أن** $\sqrt{(-٧)^{٢}} = |-٧| = ٧$

الوحدة الأولى

الدرس الأول

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

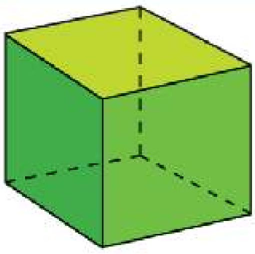
فكر وناقش

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الجذر التَّكعيبى لعددٍ نسبيٍّ باستخدام التَّحليل.
- إيجاد الجذر التَّكعيبى لعدد نسبيٍّ باستخدام الآلة الحاسبة.
- حل معادلات تشمل إيجاد الجذر التَّكعيبى.
- حلّ تطبيقات على الجذر التَّكعيبى لعدد نسبى.

المصطلحات الأساسية

- جذر تكعيبى.



سبق أن تعلمت أن:

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه

أكمل

المكعبُ الذى طول حرفه ٧سم يكون حجمه = ... × .... × ....

= .... سم^{٣}

هيا نفكّر

إذا كان لدينا مكعبٌ حجمه ١٢٥سم^{٣}، فما طول حرفه؟

نبحثُ عن ثلاثة أعداد متساوية حاصل ضربها = ١٢٥

يمكن تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامله الأولية .

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

١٢٥ = ٥ × ٥ × ٥

∴ المكعبُ الذى حجمه ١٢٥سم^{٣}، يكون طول حرفه ٥سم.

تسمى ٥ الجذر التكعيبى للعدد ١٢٥ ، **وتكتب** $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥

الجذرُ التكعيبىُّ للعددِ النسبىِّ أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ

- **يرمز للجذرِ التكعيبىِّ للعددِ النسبى أ بالرمز $\sqrt[٣]{أ}$**
- **الجذرُ التكعيبىُّ لعددٍ نسبىٍّ موجبٍ يكون موجبًا، مثلًا $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥**
- **الجذرُ التكعيبىُّ لعددٍ نسبىٍّ سالبٍ يكون سالبًا، مثلًا $\sqrt[٣]{-٨}$ = -٢ لماذا؟**
- **$\sqrt[٣]{صفر}$ = صفر**
- **$\sqrt[٣]{أ^{٣}}$ = أ**

لإيجادِ الجذر التَّكعيبى للعددِ النسبىّ المكعبِ الكامل:

- يمكن تحليلُ العدد إلى عوامله الأولية.
- يمكن استخدامُ الآلة الحاسبة.

لاحظ أن العددُ النسبىُّ المكعب الكامل له جذرٌ تكعيبىٌّ واحدٌ وهو عددٌ نسبىٌّ أيضًا، لماذا؟

أمثلة

١ استخدم التَّحليلَ لإيجاد قيمة كل من $\sqrt[3]{1000}$ ، $\sqrt[3]{-216}$ ، $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ وتحقَّق من صحة إجاباتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

١٠٠٠	٢	
٥٠٠	٢	٢
٢٥٠	٢	
١٢٥	٥	
٢٥	٥	٥
٥	٥	
١		

$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$

٢١٦	٢	
١٠٨	٢	٢
٥٤	٢	
٢٧	٣	
٩	٣	٣
٣	٣	
١		

$\sqrt[3]{-216} = -2 \times 3 = -6$

$3\frac{3}{8} = \frac{27}{8}$

٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

استخدمِ الآلةَ الحاسبةَ للتَّحقق من صحة إجابتك باستخدام $\sqrt[3]{\square}$

٢ أوجد طولَ نصف قطر الكرة التى حجمها ٤٨٥١سم^3 $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

الحل

حجم الكرة $= \frac{4}{3} \pi$ نق^3

$4851 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}$ نق^3

نق^3 $= \frac{4851 \times 3 \times 7}{4 \times 22} = \frac{9261}{8}$

$\therefore$ نق^3 $= \frac{3^3 \times 7^3}{2^3}$

$\therefore$ نق $= \sqrt[3]{\frac{3^3 \times 7^3}{2^3}} = 10.5$ سم

٩٢٦١	٣
٣٠٨٧	٣
١٠٢٩	٣
٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

حجم الكرة $= \frac{4}{3} \pi$ نق^3 حيث نق طول نصف قطر الكرة، والنسبة التقريبية تسمى π أو ط.

تدرب

أوجد طولَ قطرِ الكرة التى حجمها ١١٣,٠٤سم^{٣} (π = ٣,١٤)

مثال

حل كلًّا من المعادلات الآتية فى ن:

أ س^{٣} = ٨

ب س^{٣} + ٩ = ٨

جـ (س - ٢)^{٣} = ١٢٥

د (٢س - ١)^{٣} - ١٠ = ٥٤

الحل

أ س^{٣} = ٨

س = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

ب س^{٣} + ٩ = ٨

س^{٣} = ٨ - ٩

س^{٣} = -١

س = $\sqrt[٣]{-١}$ = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

جـ (س - ٢)^{٣} = ١٢٥

س - ٢ = $\sqrt[٣]{١٢٥}$

س - ٢ = ٥

س = ٧

∴ مجموعة الحل = {٧}

د (٢س - ١)^{٣} - ١٠ = ٥٤

(٢س - ١)^{٣} = ٦٤

٢س - ١ = $\sqrt[٣]{٦٤}$

٢ س - ١ = ٤

٢س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$ ∴ مجموعة الحل = {$\frac{٥}{٢}$}

تدرب

حلّ المعادلاتِ الآتيةَ فى ن: (س + ١)^{٣} = ٢٧ ، (س + ١)^{٣} = -٢٧

مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

فكر وناقش

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد غير النسبية.

المصطلحات الأساسية

- عدد غير نسبى.

سبق أن علمت أن: العدد النسبى هو العددُ الذى يمكن وضعُه على الصورة $\frac{أ}{ب}$: حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص، ب ≠ ٠

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة ٤س^{٢} = ٢٥

فيكون س^{٢} = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ س = ± $\frac{٥}{٢}$

ونلاحظ أن كلًّا من $\frac{٥}{٢}$ ، - $\frac{٥}{٢}$ عدد نسبى.

ولكن توجد كثيرٌ من الأعدادِ التى لايمكن وضعُها على الصورة $\frac{أ}{ب}$

حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ .

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة س^{٢} = ٢ فإننا لا نستطيع إيجاد عدد نسبى مربعه يساوى ٢

العدد غير النسبى هو العدد الذى لايمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

ومن أمثلةِ الأعدادِ غيرِ النسبيَّة:

أولاً: الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل: $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$

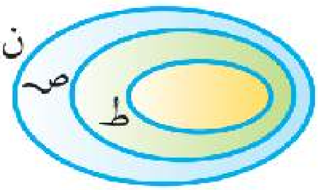
ثانيًا: الجذورُ التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

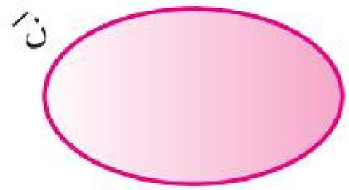
مثل: $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt[٣]{١١}$ ، ...

ثالثًا: النِّسبةُ التَّقريبية π

حيث إنه لايمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأى من هذه الأعداد. لماذا؟

ومثل هذه الأعداد وغيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز نَ .





ن ∩ نَ = ∅

فكّر : هل $\sqrt[٣]{-١}$ عدد غير نسبى ؟لماذا؟

مثال

أكمل **باستخدام أحد الرمزين ن أو نَ.**

أ $\sqrt[٣]{-٨}$ ∈ ....

ب $\sqrt{٦}$ ∈ ....

جـ π ∈ ....

د $\sqrt{٦\frac{١}{٤}}$ ∈ ....

هـ صفر ∈ ....

و $\sqrt[٣]{-٤}$ ∈ ....

ز $\left|\frac{-٣}{٥}\right|$ ∈ ....

ح $٤,٧ \times ١٠^{-٥}$ ∈ ....

ط $\sqrt[٣]{-٩}$ ∈ ....

ناقش معلمك فى حل المثال السابق

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

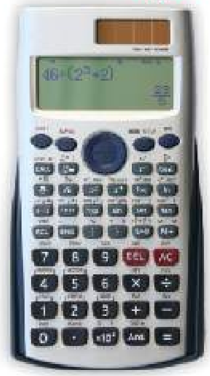
فكر وناقش

سوف تتعلم
- إيجادَ قيمة تقريبيَّة للعدد غير النسبى.
- تمثيلَ العددِ غير النسبى على خطّ الأعداد.
- حلّ معادلات فى نَ.

هل تستطيعُ إيجاد عددين نسبيين ينحصرُ بينهما العددُ غيرُ النسبى $\sqrt{٢}$

نلاحظ أن $\sqrt{٢}$ ينحصرُ بين $\sqrt{١}$ ، $\sqrt{٤}$ **أى أن** $١ < \sqrt{٢} < ٢$
أى أن $\sqrt{٢} = ١ +$ كسر عشرى .

ولإيجادِ قيمةٍ تقريبيَّة للعدد $\sqrt{٢}$ نفحص قيمَ الأعداد التالية .



$(١,١)^٢ = ١,٢١$ ، $(١,٢)^٢ = ١,٤٤$ ، $(١,٣)^٢ = ١,٦٩$ ،
$(١,٤)^٢ = ١,٩٦$ ، $(١,٥)^٢ = ٢,٢٥$

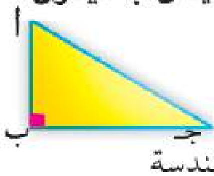
$\because ١,٩٦ < ٢ < ٢,٢٥$

$\therefore ١,٤ < \sqrt{٢} < ١,٥$

أى أن $\sqrt{٢} = ١,٤ +$ كسر عشرى
أى أن $١,٤١ < \sqrt{٢} < ١,٤٢$

استخدم الآلةَ الحاسبةَ لتأكيد صحة إجابتك.

تمهيد: (فى الشكل المقابل) المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب **فيكون:**

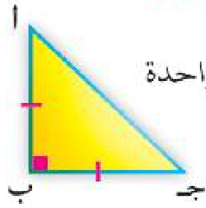


$$(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$$

وتسمى بنظريه فيثاغورس وستدرس بالتفصيل بمنهج الهندسة

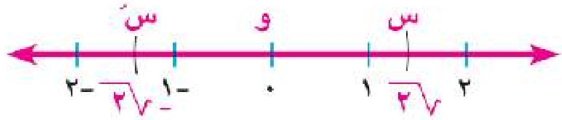
تمثيلَ العددِ غير النّسبى على خطِّ الأعداد

كيف نحدِّد النقطةَ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$ على خطِّ الأعداد .



إذا رسمنا المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب،
والمتساوى الساقين بحيث أ ب = ب جـ = وحدة طول واحدة
فإن $(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ١^٢ + ١^٢ = ٢$
$\therefore$ أ جـ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

- ارسم خطَّ الأعدادِ واركز بسنِّ الفرجار فى نقطة و، وبفتحة تساوى طول $\overline{أ جـ}$ ارسم قوسًا يقطع خط الأعداد على يمين و فى نقطة س، وهذه النقطة تمثل العدد $\sqrt{٢}$

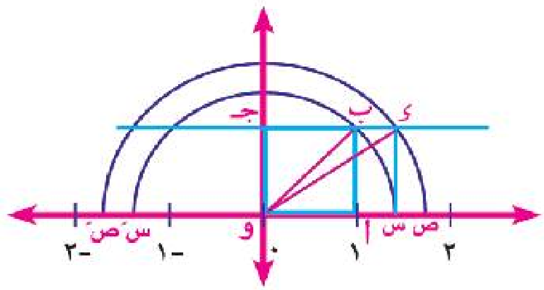


- يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد النقطة سَ التى تمثل العدد $-\sqrt{٢}$ حيث سَ على يسار النقطة و

فكّر **حدد النقطةَ التى تمثل العدد ٣ + $\sqrt{٢}$ على خط الأعداد .**

نشاط

ارسم المربع و أ ب جـ الذى طول ضلعه وحدة طول.



طول قطره = $\sqrt{١ + ١}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ و ب = $\sqrt{٢}$

- اركز بالفرجار فى و ، وارسم نصف دائرة طول نصف قطرها = طول $\overline{و ب}$ = $\sqrt{٢}$
- $\overleftrightarrow{و أ}$ ∩ نصف الدائرة = {س ، سَ}، حيث س تمثل العدد $\sqrt{٢}$ ، سَ تمثل $-\sqrt{٢}$
- ارسم $\overline{س ى}$ // $\overline{أ ب}$ ويقطع $\overleftrightarrow{جـ ب}$ فى ى

(و ى)^{٢} = (و س)^{٢} + (س ى)^{٢} = ($\sqrt{٢}$)^{٢} + (١)^{٢} = ٣

∴ و ى = $\sqrt{٣}$

- اركز بالفرجارِ فى و وبفتحة تساوى طول $\overline{و ى}$ ارسم نصف دائرة يقطع $\overleftrightarrow{و أ}$ فى ص ، صَ

∴ و ص = $\sqrt{٣}$ **أى أن** النقطةَ ص تمثل العدد $\sqrt{٣}$ ، والنقطة صَ تمثل العدد $-\sqrt{٣}$

أكمل بنفس الطريقة لتمثيل الأعداد $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٦}$ ، ... **وكذلك** $-\sqrt{٤}$ ، $-\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٦}$ ، ...

تدرب

:

١ أوجد :

أ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{٥}$

ب عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{١٢}$

جـ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[٣]{١٠}$

د عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[٣]{-٢٠}$

٢ **اثبت أن**

أ $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨   ب $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

٣ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{١١}$

٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[٣]{٢}$

٥ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطةَ التى تمثِّل العددَ غير النسبى $\sqrt{٣}$

٦ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطة التى تمثل العدد غير النسبى ١ + $\sqrt{٢}$

مثال (١)

أوجد مجموعةَ حلِّ كلٍّ من المعادلات الآتية فى نَ:

أ $س^٢ = ٢$ ب $س^٣ = ٥$ جـ $\frac{٤}{٣} س^٢ = ١$ د $٠,٠٠١ س^٣ = -٨$

الحل

أ $س^٢ = ٢$

$\therefore$ س = $\pm \sqrt{٢}$ مجموعة الحل = $\{-\sqrt{٢} ، \sqrt{٢}\}$

ب $س^٣ = ٥$

$\therefore$ س = $\sqrt[٣]{٥}$ مجموعة الحل = $\{\sqrt[٣]{٥}\}$

جـ $\frac{٤}{٣} س^٢ = ١$

$\therefore \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} س^٢ = \frac{٣}{٤} \times ١$

$س^٢ = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ س = $\pm \sqrt{\frac{٣}{٤}} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٤}} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ مجموعة الحل = $\{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\}$

د $٠,٠٠١ س^٣ = -٨$

$س^٣ = -\frac{٨}{٠,٠٠١} = -٨٠٠٠$

$\therefore$ س = $\sqrt[٣]{-٨٠٠٠}$

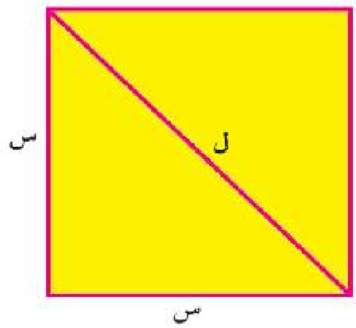
= $-٢٠ \ni$ ن

مجموعة الحل المعادلة فى نَ = $\emptyset$

مثال (٢)

أوجد **كلًّا من طولِ ضلع وطول قطر مربع مساحته ٧سم^{٢}.**

الحل



إذا كان طولُ الضلع س سم فإن المساحة = س × س= س^{٢}

س^{٢} = ٧

∴ س = ± $\sqrt{٧}$ سم ∴ س = $\sqrt{٧}$ سم لماذا؟

لإيجادِ طول قطر المربع: استخدم نظرية فيثاغورس

ل^{٢} = س^{٢} + س^{٢} حيث ل طول قطر المربع

∴ ل^{٢} = ١٤

∴ ل = ± $\sqrt{١٤}$ ∴ ل = $\sqrt{١٤}$ سم لماذا؟

مثال (٣)

دائرة مساحة سطحها ٣π سم^{٢} أوجد محيطها.

الحل

مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢}

٣π = π نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٣

نق = $\sqrt{٣}$ سم أو نق = - $\sqrt{٣}$ سم (مرفوض)

محيط الدائرة = ٢ πنق = ٢ π × $\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ π سم.

مجموعة الأعداد الحقيقية ح

فكر وناقش

سبق أن درسنا مجموعةَ الأعدادِ النسبيَّة ن، ووجدنا أن هناك أعدادًا أخرى مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{2}$ ، π، ... وهذه الأعدادُ تكون مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

اتحاد المجموعتين ن، نَ يعطى مجموعةً جديدةً تسمى مجموعةَ الأعداد الحقيقية ، ويرمز لها بالرمز ح.

ح = ن ∪ نَ

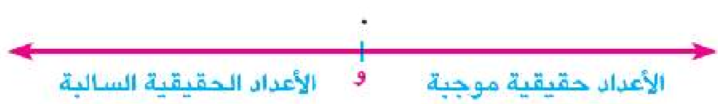
تأمَّل شكلَ فى المقابل تجد أن:

1. ن ∩ نَ = ∅
2. أى عدد طبيعى أو صحيح أو نسبى أو غير نسبى هو عدد حقيقى.

ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح وكذلك نَ ⊂ ح

فكّر :**أعط أمثلةً من عندك لأعداد حقيقيَّة بعضها نسبى وبعضها غير نسبى.**

3. كلُّ عددٍ حقيقىٍّ تمثله نقطةٌ واحدةٌ على خطِّ الأعداد .



أولاً: العددُ صفر تمثله نقطة الأصل و.

ثانيًا: الأعدادُ الحقيقيةُ الموجبةُ تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يمين و

ثالثًا: الأعدادُ الحقيقيةُ السالبة تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يسار و

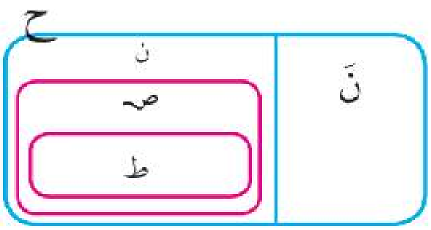
سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- العَلاقة بين مجموعات الأعداد ط، ص، ن، نَ ، ح.

المصطلحات الأساسية

- عدد حقيقى.

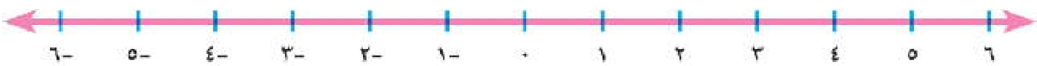
تدرب



١ **ضع** كلًّا من الأعدادِ الآتية فى مكانها المناسب على شكل فِن المقابل.

$\frac{١}{٢}$ ، -٤ ، ٩ ، $\sqrt{٥}$ ، ٠,٦ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٠ ، ٥

٢ **حدّد** على خطِّ الأعدادِ النقطةَ أ التى تمثِّل العدد $\sqrt[٣]{-٨}$ ، والنقطة ب التى تمثل العدد $\sqrt{٩}$ وأوجد طول $\overline{أب}$.



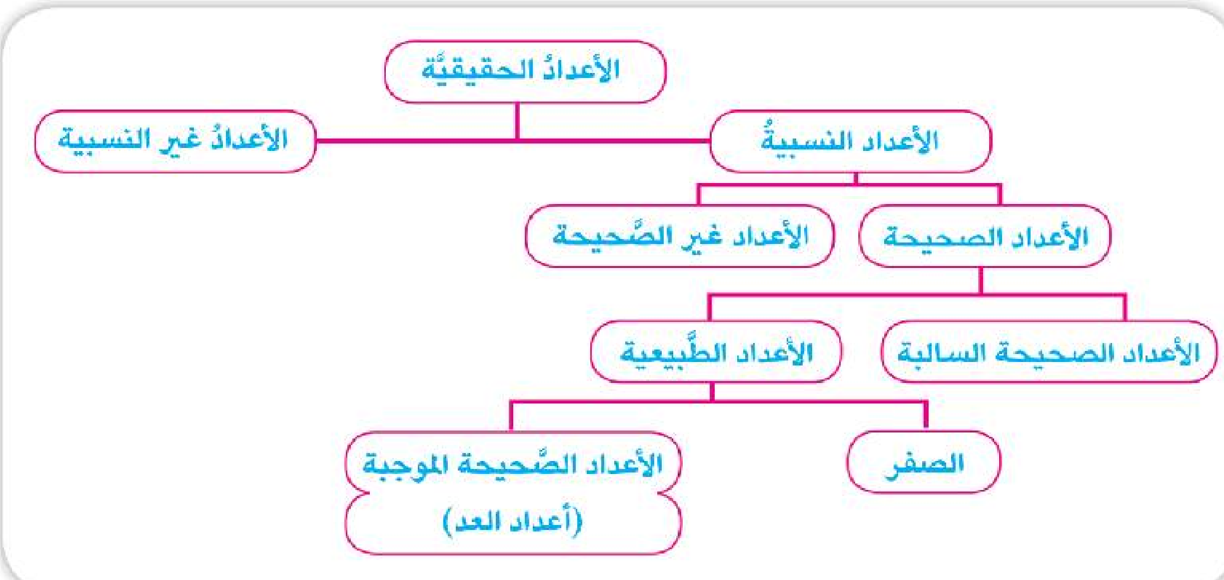
٣ **وضِّح صحةَ أو خطأَ كل من العبارتين:**

أ كل عدد طبيعى هو عدد حقيقى موجب.

ب كل عدد صحيح هو عدد حقيقى.

لاحظ أن: $\sqrt[٣]{-١}$ = -١ لأن -١ × -١ × -١ = -١

بينما $\sqrt{-١}$ ∉ ح لأنه لايوجد عدد حقيقى إذا ضرب فى نفسه يعطى -١.



ناقش مع معلمك/معلمتك و زملائك: هل توجد أعدادٌ غيرُ حقيقية ؟

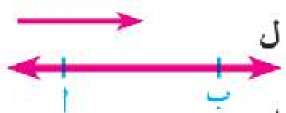
الوحدة الأولى

الدرس الخامس

علاقة الترتيبِ فى ح

فكر وناقش

إذا كانت أ، ب نقطتين تنتميان للمستقيم ل، وحدَّدنا اتجاهًا معينًا كالمبين بالسهم فإنه يمكن القول إن:



- النقطة ب تلى النقطة أ، أى تكون على يمينها.
- النقطة أ تسبق النقطة ب، أى تكون على يسارها.

وهكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عددًا حقيقيًّا فإننا نقول إن:

مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة مرتبة

خواصُ الترتيب:

١ إذا كان س، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خطِّ الأعدادِ النقطتان أ، ب على التَّرتيب فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

س = ص أ = ب	س ص أ ب	ص س ب أ
أ تنطبق على ب ∴ س = ص	**أ تسبق ب** ∴ س < ص	**أ تلى ب** ∴ س > ص

٢ إذا كانت س عددًا حقيقيًّا تمثله النقطةُ أ على خطِّ الأعداد، وكانت و هى نقطة الأصل التى تمثِّل العدد صفر فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:

س = ٠ أ = و	٠ س و أ	س ٠ أ و
أ تنطبق على و ∴ س = ٠	**أ على يمين و** ∴ س > ٠ ويقال إن س عدد حقيقى موجب .	**أ على يسار و** ∴ س < ٠ ويقال إن س عدد حقيقى سالب .

سوف تتعلم

- عَلاقة الترتيب فى ح.

المصطلحات الأساسية

- عَلاقة ترتيب .
- أكبر من .
- اصغر من .
- تساوى .
- ترتيب تصاعدى .
- ترتيب تنازلى .

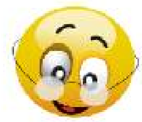
مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّة الموجبة: $ح_+ = \{س: س \in ح ، س > ٠\}$

مجموعة الأعدادِ الحقيقيّة السالبة: $ح_- = \{س: س \in ح ، س < ٠\}$

$$ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$$

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّة غير السالبة $= ح_+ \cup \{٠\} = \{س : س \geq ٠، س \in ح\}$

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّة غير الموجبة $= ح_- \cup \{٠\} = \{س : س \leq ٠، س \in ح\}$



مثال (١)

رتّب الأعدادَ الآتيَة تصاعديًا $\sqrt{٢٧}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٦ ، ٠ ، $\sqrt[٣]{-١}$

الحل

$٦ = \sqrt{٣٦}$ ، $\sqrt[٣]{-١} = -١ = -\sqrt{١}$

الترتيبُ التصاعديُّ من الأصغرِ إلى الأكبر $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٣٦}$

أي $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ٦

مثال (٢) من الشكل المقابل :

أوجد مجموعة الأعداد التى تنتمى إليها س حيث س عدد صحيح

الحل

من الشكل نلاحظ أن : $س^٢ > س > س^٣$

فعند اختيار س عدد صحيح سالب يحقق المتباينة السابقة

مثل : $س = -٣ \Longleftarrow ٩ > -٣ > -٢٧$

$\therefore$ مجموعه الأعداد التى تنتمى إليها س هى $ص_- = \{-١ ، -٢ ، -٣ ، ....\}$

اختر س عدد صحيح موجب . هل تتحقق المتباينة ؟ ناقش معلمك

الوحدة الأولى

الدرس السادس

الفترات

فكر وناقش

سوف تتعلم
- الفترات المحدودة.
- الفترات غير المحدودة.
- العمليات على الفترات .

المصطلحات الأساسية
- فترة محدودة .
- فترة مغلقة .
- فترة مفتوحة .
- فترة نصف مفتوحة .
- فترة غير محدودة .
- اتحاد .
- تقاطع .
- فرق .
- مكملة .

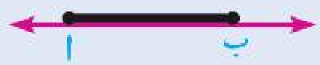
الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً: الفترات المحدودة

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، أ < ب فإننا نعرف كلًّا من:

الفترة المغلقة [أ ، ب]

[أ، ب] = {س : أ ≤ س ≤ ب ، س ∈ ح}

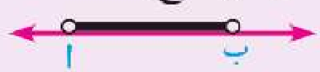


[أ، ب] ⊂ ح وعناصرها أ، ب وجميع الأعداد الحقيقية بينهما

توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد .

الفترة المفتوحة]أ، ب[

]أ، ب [= { س: أ < س < ب، س ∈ ح}



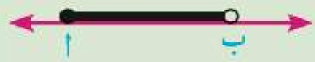
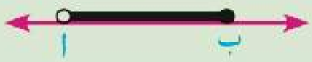
]أ ، ب[⊂ ح وعناصرها هى جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين أ ، ب .

توضع دائرة مفتوحة (غير مظللة) عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خطِّ الأعداد

تدرب

اكتب كلًّا من [٣، ٥]،]٣، ٥[بطريقةِ الصِّفة المميزة ثم مثِّل كلًّا منهما على خط الأعداد.

الفترات نصف المفتوحة أو (نصف المغلقة)

[أ ، ب[ [أ ، ب[= {س : أ ≤ س < ب ، س ∈ ح} [أ ، ب[⊂ ح عناصرها العدد أ وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .	]أ ، ب] ]أ ، ب] = {س : أ < س ≤ ب ، س ∈ ح}]أ ، ب] ⊂ ح عناصرها العدد ب وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .

تدرب

اكتب كلًّا من الفترتين [٣ ، ٥[،]٣ ، ٥] بطريقةِ الصِّفة المميزة ، و مثل كلًّا منهما على خطِّ الأعداد.

مثال (١)

مثِّل بيانيًّا على خطِّ الأعداد كلًّا من: [-١، ٤] ،]-١، ٤[، [-١، ٤[، {-١، ٤}

الحل

[-١، ٤]

فترة مغلقة

]-١، ٤[

فترة مفتوحة

[-١، ٤[

فترة نصف مفتوحة

{-١، ٤}

مجموعة

ناقِشْ مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل الفترةُ مجموعةٌ منتهيةٌ أم غيرُ منتهيةٍ؟

مثال (٢)

١ اكتب على صورةِ فترة، كلًّا من المجموعاتِ الآتية، ومثِّل كلًّا منها على خطِّ الأعداد:

أ سـ = {س : ٢ < س < ٥ ، س ∈ ح}

ب سـ = {س : -٢ ≤ س < ٣ ، س ∈ ح}

جـ سـ = {س : ٠ ≤ س ≤ ٤، س ∈ ح}

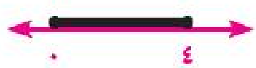
د سـ = {س : -٣ < س ≤ -١ ، س ∈ ح}

الحل

أ سـ =]٢، ٥[

ب سـ =]-٢، ٣[

جـ سـ = [٠، ٤]



د سـ =]-٣، -١]

٢ ضع الرمزَ المناسبَ ∈ أو ∉ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ .... [-١، ٣[

ب -٢ ....]-١، ٣[

جـ $\frac{١}{٢}$ ....]٠، ١[

د $\sqrt{٢}$ .... [١، ٢]

هـ ٤ .... [٠، ٥[

و $\sqrt[٣]{-٨}$ .... [-١، ٢]

ز |-٥| .... [٤، ٦[

ح ٢٫٣ × ١٠$^{-٥}$ ....]٠، ١٠[

الحل

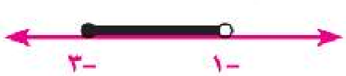
أ ∉ ب ∉ جـ ∈ د ∈

هـ ∈ و ∉ ز ∈ ح ∈

٣ اكتب الفترةَ التى يعبِّر عنها كلٌّ من الأشكالِ الآتية:

أ

جـ



ب

د

الحل

أ [٠، ٣] ب]-٤، ١]

جـ [-٣، -١[د]٠، ٦[

ثانيًا: الفتراتُ غيرُ المحدودة

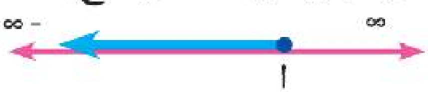
تعلم أن: خط الأعداد الحقيقيَّة مهما امتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين وسالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط.

- الرمز (∞) و يقرأ (لانهاية) و هو أكبر من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصورُه ، ∞ ∌ ح
- الرمز (-∞) و يقرأ (سالب لانهاية) و هو أصغرُ من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصوره ، -∞ ∌ ح
- الرمزان ∞ ، -∞ لاتوجد نقط تمثلهما على خطِّ الأعداد الحقيقية، وهما امتداد لخط الأعداد من جهتيه.

وإذا كان أ عددًا حقيقيًا فإننا نعرفُ الفتراتِ غيرَ المحدودة التالية:

الفترة [أ ، ∞[

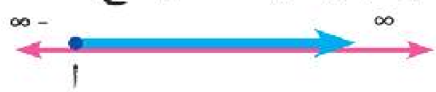
[أ، ∞[= {س : س ≥ أ ، س ∈ ح}



وهى تعبِّر عن العددِ أ وجميع الأعداد الحقيقيَّة أكبر من أ.

الفترة]-∞ ، أ]

]-∞ ، أ] = {س : س ≤ أ ، س ∈ ح}

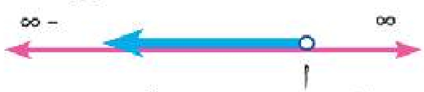


وهى تعبر عن العدد أ وجميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أ.

اكتب كلًّا من الفترتين [٣، ∞[،]-∞، ٣] بطريقةِ الصِّفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

الفترة]أ، ∞[

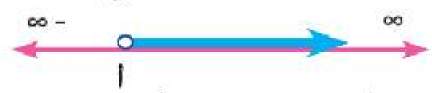
]أ، ∞[= {س : س > أ ، س ∈ ح}



وهى تعبِّر عن جميع الأعـداد الحقيقية الأكبر من أ

الفترة]-∞ ، أ[

]-∞ ، أ[= {س : س < أ ، س ∈ ح}



وهى تعبِّر عن جميع الأعـداد الحقيقية الأصغر من أ

اكتب الفترتين]٣، ∞[،]-∞، ٣[بطريقةِ الصفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة ح يمكن التعبيرُ عنها على صورة الفترة]-∞ ، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة الموجبة $ح_+$ =]٠، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة السالبة $ح_-$ =]-∞، ٠[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير السالبة = [٠ ، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير الموجبة =]-∞ ، ٠]

تدرب

١ اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّلها على خطِّ الأعداد.

أ س~ = {س : س ⩾ ٢ ، س ∈ ح}

ب س~ = {س : س < ٣ ، س ∈ ح}

جـ س~ = {س : س > -٧ ، س ∈ ح}

د س~ = {س : س ⩽ $\sqrt[3]{-٨}$ ، س ∈ ح}

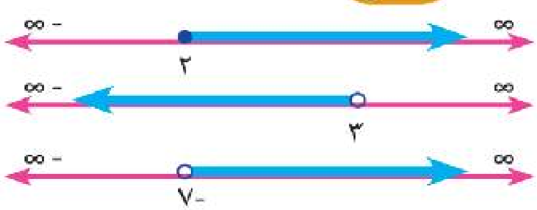
هـ مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من |-٣|

الحل

أ س~ = [٢، ∞[

ب س~ =]-∞، ٣[

جـ س~ =]-٧، ∞[



أكمل الحل

٢ ضع الرمزَ المناسبَ ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ ....]-∞، ٤]

ب [١ ، ٢] .... [-١، ∞[

جـ -٥ ....]-∞، -٦]

د]٠ ، ٢] ....]٠، ∞[

هـ ٣ × $١٠^{١٠}$ ....]٣، ∞[

و [-٣، ١] .... [٢، ∞[

الحل

أ ∈ ب ⊂ جـ ∉ د ⊂ هـ ∈ و ⊄

العملياتَ على الفتراتِ

حيث إن الفترات هى مجموعاتٌ جزئيّةٌ من مجموعةِ الأعداد الحقيقية ح، فإنه يمكن إجراءُ عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة على الفترات، ويمكن الاستعانةُ بالتمثيلِ البيانيِّ للفترات على خطِّ الأعدادَ ؛ لتحديد وتوضيح ناتج العملية ويتضحُ ذلك من الأمثلة التالية:

أمثلة

١ إذا كانت س = [-٢، ٣] ، ص = [١، ٥[فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ س ∩ ص   ب س ∪ ص

الحل

أ س ∩ ص = [-٢، ٣] ∩ [١، ٥[= [١، ٣]

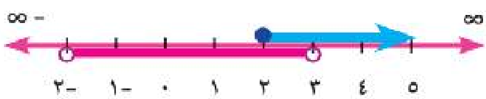
ب س ∪ ص = [-٢، ٣] ∪ [١، ٥[= [-٢، ٥[

٢ إذا كانت م = [٢، ∞[، ى =]-٢، ٣[فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ م - ى   ب م ∩ ى   جـ م ∪ ى

د ى ∪ {٢، ٣}   هـ مَ   و ىَ

الحل



أ م - ى = [٢، ∞[-]-٢، ٣[= [٣، ∞[

ب م ∩ ى = [٢، ∞[∩]-٢، ٣[= [٢، ٣[

جـ م ∪ ى = [٢، ∞[∪]-٢، ٣[=]-٢، ∞[

د ى ∪ {٢، ٣} =]-٢، ٣[∪ {٢، ٣} =]-٢، ٣]

هـ مَ =]-∞، ٢[و ىَ =]-∞، -٢] ∪ [٣، ∞[

تدرب

ضَعْ علامة (✓) أمام العبارة الصَّحيحة وعلامةَ (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ [-٢، ٥] - {٢، ٥} =]-٢، ٥[د [-١، ٣] ∩]١، ٤[= [١، ٣]

ب]-١، ٣] ∪ {-١، ٠} = [-١، ٠]   هـ [-٢، ٥[∪ {١، ٥} = [-٢، ٥]

جـ [٢، ٥] - {٥} = [٢، ٥[و [٥، ∞[-]-∞، ٥] =]٥، ∞[

الوحدة الأولى
الدرس السابع

العمليات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

سوف تتعلم

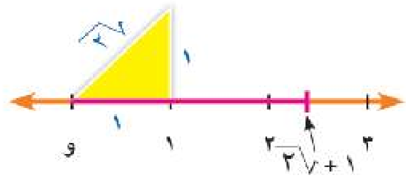
- العمليات على الأعداد الحقيقية .
- خواصُ العملياتِ على الأعداد الحقيقية .

المصطلحات الأساسية

- الانغلاق .
- الإبدال .
- الدمج .
- المحايد الجمعي .
- المعكوس الجمعي .
- المحايد الضربي .
- المعكوس الضربي .
- توزيع الضرب على الجمع أو الطرح .

أولاً: خواصُ جمع الأعدادِ الحقيقيَّة

سبق أن حدَّدنا موضعَ النقطةَ س التى تمثل العدد $١ + \sqrt{٢}$ على خطِّ الأعداد، وحيث إنه يمثلُ مجموعَ العددين الحقيقيين ١ ، $\sqrt{٢}$ فإن مجموعَ كلِّ عددينِ حقيقيين هو عددٌ حقيقى .



أى أن مجموعةَ الأعدادِ الحقيقية ح مغلقةٌ تحت عمليَّة الجمع .

الانغلاق إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن (أ + ب) ∈ ح

فمثلاً: كل من $٢ + ٣$ ، $١ + \sqrt{٢}$ ، $-٢ + \sqrt{٥}$ ، $٢ + \sqrt[٣]{٣}$ عددٌ حقيقيٌّ .

الإبدال إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب = ب + أ

فمثلاً: $٢ + \sqrt{٣} = \sqrt{٣} + ٢$ ، $٣ - \sqrt{٥} = -\sqrt{٥} + ٣$

الدمج إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، جـ ∈ ح
فإن (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) = أ + ب + جـ

فمثلاً: $(٣ + \sqrt{٢}) + ٥ = ٣ + (\sqrt{٢} + ٥)$ **خاصية الدمج**

$= ٣ + (٥ + \sqrt{٢})$ **خاصية الإبدال**

$= (٣ + ٥) + \sqrt{٢}$ **خاصية الدمج**

$= ٨ + \sqrt{٢}$

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي إذا كان أ ∈ ح فإن أ + ٠ = ٠ + أ = أ

فمثلاً: $\sqrt{٥}$ + ٠ = ٠ + $\sqrt{٥}$ = $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt[٣]{٤}$ + ٠ = ٠ + (-$\sqrt[٣]{٤}$) = -$\sqrt[٣]{٤}$

وجود معكوس جمعي لكل عدد حقيقي لكل أ ∈ ح يوجد (-أ) ∈ ح
حيث أ + (-أ) = (-أ) + أ = صفرًا

فمثلاً: $\sqrt{٣}$ ∈ ح ، معكوسه الجمعي (-$\sqrt{٣}$) ∈ ح حيث
$\sqrt{٣}$ + (-$\sqrt{٣}$) = (-$\sqrt{٣}$) + $\sqrt{٣}$ = صفرًا.

تدرب

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:

أ) $\sqrt{٢}$ + ٥ = ٥ + ...

ب) $\sqrt{١١}$ + (-$\sqrt{١١}$) = ...

جـ) ٧ + $\sqrt{٣}$ = ٥ + (............... + ...)

د) المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt{٨}$ هو ....

هـ) المعكوس الجمعي للعدد (١ - $\sqrt{٢}$) هو ....

و) $\sqrt{٣}$ + (-$\sqrt{٣}$) = ...

ز) ٧ + $\sqrt{٥}$ - ٣ = ...

ح) (٤ + $\sqrt{٧}$) + (٣ - $\sqrt{٧}$) = ...

ط) إذا كانت أ ∈ ح، ب ∈ ح فإن أ - ب تعنى ناتج جمع العدد أ و .... للعدد ب.

ى) إذا كانت أ ∈ ط، ب ∈ ن ، جـ ∈ ح فإن (أ + ب + جـ) ∈ ....

٢ **ناقِش مع معلمك / معلمتك و زملائك: موضحًا بأمثلة:**

أ) هل عمليَّةُ الطرح إبداليَّة فى ح؟

ب) هل عمليَّةُ الطرِح دامجةٌ فى ح؟

ثانيًا: خواصُ ضربِ الأعدادِ الحقيقية:

الانغلاق إذا كانت أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح فإن أ $\times$ ب $\in$ ح

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ مغلقةٌ تحت عملية الضرب.

أى أن حاصل ضرب كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقي.

مثلاً: $٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢} \in$ ح ، $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣ \in$ ح

$-٢ \times \sqrt[٣]{٥} = -٢\sqrt[٣]{٥} \in$ ح ، $\frac{٢}{٣} \times \pi = \frac{٢}{٣}\pi \in$ ح

$٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٦ \in$ ح ، $٢\sqrt{٣} \times ٥ = ١٠\sqrt{٣} \in$ ح

الإبدال لكلِّ عددين حقيقيين أ ، ب يكون أ $\times$ ب = ب $\times$ أ

مثلاً: $\sqrt{٢} \times ٣ = ٣ \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

الدمج لكلِّ ثلاثةِ أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون

(أ $\times$ ب) $\times$ جـ = أ $\times$ (ب $\times$ جـ) = أ $\times$ ب $\times$ جـ

مثلاً: $\sqrt{٢} \times (٥ \times \sqrt{٢}) = (\sqrt{٢} \times ٥) \times \sqrt{٢} = (٥ \times \sqrt{٢}) \times \sqrt{٢}$

$= ٥ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٥ \times ٢ = ١٠$

الواحد هو العنصرُ المحايدُ الضّربى لكلِّ عددٍ حقيقىٍّ أ يكون أ $\times$ ١ = ١ $\times$ أ = أ

مثلاً: $٢\sqrt{٥} \times ١ = ١ \times ٢\sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

وجود معكوسٍ ضربىٍّ لكلِّ عدد حقيقى ≠ ٠ لكل عدد حقيقى أ ≠ صفر

يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{أ}$

حيث أ $\times \frac{١}{أ} = \frac{١}{أ} \times$ أ = ١ (المحايد الضربى)

مثلاً: المعكوسُ الضربىُّ للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هو $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ حيث $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١$

لاحظ أن: $\frac{أ}{ب}$ = أ $\times \frac{١}{ب}$ ، ب ≠ ٠

أى أن $\frac{أ}{ب}$ = أ $\times$ المعكوس الضربى للعدد ب.

ناقش مع معلمك / معلمتك: هل عملية القسمة إبدالية فى ح؟ هل عملية القسمة دامجة فى ح؟

مثال

اكتب كلًا من الأعدادِ $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}}$ بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا.

الحل

لاحظ أن المحايد الضربى ١ يمكن كتابته بالصورة $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ أو $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ أو ...

$$\frac{٦}{\sqrt{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٦\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١} = ٣\sqrt{٢}$$

$$-\frac{٥}{\sqrt{٣}} = \frac{-٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$$

$$\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} = \frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٥\sqrt{٥}}{٢ \times ٥} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$$

تدرب

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحة:

أ) $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ...\times \sqrt{٢} = ...$

ب) $٣ \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥} \times ....$

جـ) $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ...$

د) $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = ...$

هـ) المحايد الضربى فى ح هو العدد ....

و) المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ هو ....

٢ **اكتب** كلًا من الأعدادِ الآتية بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا:

أ) $\frac{١٥}{\sqrt{٦}}$ ب) $\frac{٨}{٣\sqrt{٢}}$

جـ) $-\frac{٦}{\sqrt{٣}}$ د) $\frac{٢٥}{٢\sqrt{١٠}}$

توزيع الضرب على الجمع

لأى ثلاثة أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون .

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ) = أب + أجـ

(أ + ب) × جـ = (أ × جـ) + (ب × جـ) = أجـ + ب جـ

أمثلة

١ اختصر إلى أبسط صورة .

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥})$ ب $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢})$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢}$

الحل

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥}) = ٢\sqrt{٥} \times ٣ + ٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

$= ٢ \times ٣ \times \sqrt{٥} + ٢ \times ٥ = ٦\sqrt{٥} + ١٠$

ب $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢}) = \sqrt{٢}\,(٣ + \sqrt{٢}) + ٥\,(٣ + \sqrt{٢})$

$= \sqrt{٢} \times ٣ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ٥ \times ٣ + ٥ \times \sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٢ + ١٥ + ٥\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ١٧ + ٥\sqrt{٢} = ٨\sqrt{٢} + ١٧$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢} = (٢)^{٢} + ٢ \times ٢ \times -٣\sqrt{٥} + (-٣\sqrt{٥})^{٢}$

$= ٤ - ١٢\sqrt{٥} + ٩ \times ٥$

$= ٤٩ - ١٢\sqrt{٥}$

٢ أعط تقديرًا لناتج $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$ و تحقَّق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً: تقدير $\sqrt{٥}$ هو ٢ $\therefore$ $(٣ + \sqrt{٥})$ تقديرها هو $٣ + ٢ = ٥$

تقدير $\sqrt{٨}$ هو ٣ $\therefore$ $(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $١ + ٣ = ٤$

$\therefore$ $(٣ + \sqrt{٥})(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $٥ \times ٤ = ٢٠$

ثانيًا: عند استخدام الآلة الحاسبة لحساب $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$

نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩ أي أن التقدير مقبولٌ.

الوحدة الأولى

الدرس الثامن

العمليات على الجذور التربيعية

فكّر وناقِش

سوف تتعلَّم

- إجراءُ العمليات على الجذور التربيعية .
- ضرب عددين مترافقين.

المصطلحات الأساسية

- جذر تربيعي .
- عددان مترافقان .

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

أولاً: $\boxed{\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}}$

فمثلاً: $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٢ \times ٣} = \sqrt{٦}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٢ \times ١٠} = \sqrt{٢٠}$

$\sqrt{١٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{١٥ \times ٥} = \sqrt{٧٥}$

$\boxed{\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}}$

فمثلاً: $\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

$\sqrt{٧٥} = \sqrt{٢٥ \times ٣} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

ثانيًا: $\boxed{\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}}$ حيث ب $\neq$ ٠

فمثلاً: $\sqrt{\frac{٥}{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٥}$

$\sqrt{\frac{١٦}{٣}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

ثالثًا: $\boxed{\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{ب}}$ ب $\neq$ ٠

فمثلاً: $\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

$\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورةٍ $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحل

$$\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦ \times ٢} - \sqrt{٣٦ \times ٢} + ٦ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$$

$$= \sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢} + ٦ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$$

$$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

٢ إذا كان $س = ٢\sqrt{٥} - ١$ ، $ص = ٢ + \sqrt{٥}$ أوجد قيمة المقدار $س^٢ + ص^٢$

الحل

$$س^٢ = (٢\sqrt{٥} - ١)^٢ = (٢\sqrt{٥})^٢ - ٤\sqrt{٥} + ١$$

$$= ٤ \times ٥ - ٤\sqrt{٥} + ١ = ٢١ - ٤\sqrt{٥}$$

$$ص^٢ = (٢ + \sqrt{٥})^٢ = ٤ + ٤\sqrt{٥} + ٥ = ٩ + ٤\sqrt{٥}$$

$$س^٢ + ص^٢ = ٢١ - ٤\sqrt{٥} + ٩ + ٤\sqrt{٥} = ٣٠$$

تدرب

١ ضع كلًّا ممايأتى على صورة $أ\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

- أ $\sqrt{٢٨}$
- ب $\sqrt{٧٥}$
- ج $\sqrt{٥٤}$
- د $\sqrt{١٠٠٠}$
- هـ $٢\sqrt{٧٢}$
- و $\frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

- أ $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$
- ب $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$
- ج $٣\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٢٨}$
- د $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$
- هـ $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$
- و $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$

٢ **أوجد** قيمةَ كل من س + ص ، س × ص فى الحالات الآتية:

أ) س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ، ص = ١ - $\sqrt{٥}$

ب) س = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$

جـ) س = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$ ، ص = ٥ - ٣$\sqrt{٢}$

العددان المترافقان

إذا كان ا ، ب عددين نسبيين موجبين

فإن كلًّا من العددين $(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})$ **هو مرافق للعدد الآخر .**

ويكون مجموعهما = ٢$\sqrt{ا}$ = ضعف الحد الأول

وحاصل ضربهما = $(\sqrt{ا} + \sqrt{ب}) \times (\sqrt{ا} - \sqrt{ب}) = (\sqrt{ا})^{٢} - (\sqrt{ب})^{٢} =$ ا - ب

= مربع الحد الأول - مربع الحد الثانى

حاصلُ ضربِ العددين المترافقين هو دائمًا عددٌ نسبىٌّ

إذا كان لدينا عددٌ حقيقىٌّ مقامه على الصورة $(\sqrt{ا} \pm \sqrt{ب})$ فيجب وضعُه فى أبسط صورةٍ ، وذلك بضرب البسطِ والمقامِ فى مرافق المقام .

تدرّب

أكمل

أ) $\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٢}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...

ب) ٥ - $\sqrt{٣}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...

جـ) ٢$\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...

أمثلة

١ إذا كانت س $= \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ص $= \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}}$

اكتب كلًا من س ، ص بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا ثم أوجد س + ص

الحل

س $= \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

$= \frac{٨(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{(\sqrt{٥})^{٢} - (\sqrt{٣})^{٢}} = \frac{٨(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{٥ - ٣}$

$= ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣}$

ص $= \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} \times \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$

$= \frac{(٢ - \sqrt{٣})^{٢}}{٤ - ٣} = \frac{٤ - ٤\sqrt{٣} + ٣}{١} = ٧ - ٤\sqrt{٣}$

س + ص $= ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣} + ٧ - ٤\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٥} + ٧$

٢ إذا كانت س $= \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ص $= \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

أثبت أن س ، ص عددان مترافقان، ثم أوجد قيمةَ كلٍّ من المقدارين

س^{٢} − ٢س ص + ص^{٢} ، (س − ص)^{٢} ماذا تلاحظ؟

الحل

س $= \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$

ص $= \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ ∴ س ، ص عددان مترافقان

س^{٢} − ٢س ص + ص^{٢} $= (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^{٢} - ٢(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) + (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣) - ٢(٧ - ٣) + (٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣)$

$= ١٠ + ٢\sqrt{٢١} - ٨ + ١٠ - ٢\sqrt{٢١}$

$= ١٢$

(س − ص)^{٢} $= [(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}) - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})]^{٢}$

$\therefore (\text{س} - \text{ص})^{٢} = [\sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣}]^{٢} = (٢\sqrt{٣})^{٢}$

$= ٤ \times ٣ = ١٢$

ويلاحظ أن $\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} - \text{ص})^{٢}$

٣ في المثالِ السابقِ احسب كلًّا من

أ $(\text{س} + \text{ص})$ ب $(\text{س} - \text{ص})$

جـ $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص})$ د $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$ **ماذا تلاحظ**

الحل

أ $\text{س} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

فإن $\text{س} + \text{ص} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} + \sqrt{٧} - \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٧}$

ب $\text{س} - \text{ص} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

$= \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

جـ $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = ٢\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٢١}$

د $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^{٢} - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣) - (٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣)$

$= ٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣ - ٧ + ٢\sqrt{٢١} - ٣$

$= ٤\sqrt{٢١}$

نلاحظ أن $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$

الوحدة الأولى

الدرس التاسع

العمليات على الجذور التكعيبية

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- العملياتُ على الجذور التكعيبية.

المصطلحات الأساسية

- الجذر التكعيبى.

لأى عددينِ حقيقيين أ ، ب:

١ $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أ \times ب}$

فمثلاً: $\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٢} = \sqrt[3]{٥ \times ٢} = \sqrt[3]{١٠}$

$\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{-٤} = \sqrt[3]{٣ \times -٤} = \sqrt[3]{-١٢}$

لأى عددين حقيقيين أ ، ب:

٢ $\sqrt[3]{أ \times ب} = \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب}$

فمثلاً: $\sqrt[3]{٤٠} = \sqrt[3]{٨ \times ٥} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٥} = ٢\sqrt[3]{٥}$

$\sqrt[3]{-١٢٨} = \sqrt[3]{-٦٤ \times ٢} = \sqrt[3]{-٦٤} \times \sqrt[3]{٢} = -٤\sqrt[3]{٢}$

٣ $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ حيث ب $\neq$ ٠، أ، ب $\in$ ح

فمثلاً: $\frac{\sqrt[3]{١٢}}{\sqrt[3]{٣}} = \sqrt[3]{\frac{١٢}{٣}} = \sqrt[3]{٤}$

٤ $\sqrt[3]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}}$ حيث ب $\neq$ ٠، أ، ب $\in$ ح

فمثلاً: $\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٣}}{\sqrt[3]{٢}}$

فكّر إذا ضربنا كلًّا من البسط والمقام فى $\sqrt[3]{٤}$ ، فأوجد الناتجَ فى أبسط صورة.

أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورة:

أ $\sqrt[٣]{٥٤} + ٨\sqrt[٣]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[٣]{١٦}$ **ب** $\sqrt[٣]{٢٤} - ٦\sqrt[٣]{١٣\frac{٨}{٩}}$

الحل

أ $\sqrt[٣]{٥٤} + ٨\sqrt[٣]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[٣]{١٦} = \sqrt[٣]{٢٧ \times ٢} + ٨\sqrt[٣]{\frac{-١}{٤} \times \frac{٢}{٢}} + ٥\sqrt[٣]{٨ \times ٢}$

$= \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{٢} + ٨\frac{\sqrt[٣]{-٢}}{\sqrt[٣]{٨}} + ٥ \times \sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٢}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + \frac{٨ \times -\sqrt[٣]{٢}}{٢} + ٥ \times ٢ \times \sqrt[٣]{٢}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} - ٤\sqrt[٣]{٢} + ١٠\sqrt[٣]{٢} = ٩\sqrt[٣]{٢}$

ب $\sqrt[٣]{٢٤} - ٦\sqrt[٣]{١٣\frac{٨}{٩}} = \sqrt[٣]{٢٤} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٨}} = \sqrt[٣]{٨ \times ٣} - ٦ \times \frac{\sqrt[٣]{١٢٥}}{\sqrt[٣]{٨}}$

$= \sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٣} - ٦ \times \frac{٥}{٢} = ٢\sqrt[٣]{٣} - ١٥$

٢ إذا كانت $\text{س} = \sqrt[٣]{٣} + ١$، $\text{ص} = \sqrt[٣]{٣} - ١$

فأوجد قيمة كل من :

أ $(\text{س} + \text{ص})^{٣}$ **ب** $(\text{س} - \text{ص})^{٣}$

الحل

أ $(\text{س} + \text{ص})^{٣} = (\sqrt[٣]{٣} + ١ + \sqrt[٣]{٣} - ١)^{٣}$

$= (٢\sqrt[٣]{٣})^{٣} = ٨ \times ٣ = ٢٤$

ب $(\text{س} - \text{ص})^{٣} = (\sqrt[٣]{٣} + ١ - \sqrt[٣]{٣} + ١)^{٣}$

$= (٢)^{٣} = ٨$

الوحدة الأولى

الدرس العاشر

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

سوف تتعلم

- حل تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

المصطلحات الأساسية

- دائرة.
- متوازى المستطيلات.
- مكعب.
- أسطوانة دائرية قائمة.
- كرة.

الدائرة

محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية.

مساحة الدائرة = π نق^{٢} وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية)

أمثلة

١ **أوجد** محيط دائرة مساحتها ٣٨,٥ سم^{٢} ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

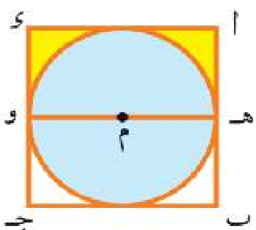
مساحة الدائرة = π نق^{٢}

٣٨,٥ = $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} ∴ نق^{٢} = $\frac{٧ \times ٣٨,٥}{٢٢}$ = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ نق = $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}}$ = $\frac{٧}{٢}$ = ٣,٥ سم

٢ فى الشكلِ المقابلِ الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب جـ ى، فإذا كانت مساحة الجزء الملون باللون الأصفر $\frac{٥}{٧}$ ١٠سم^{٢}

أوجد محيط هذا الجزء ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



الحل

نفرض أن طولَ نصف قطر الدائرة = نق .

∴ طول ضلع المربع = ٢ نق

مساحة الجزء باللون الأصفر = مساحة المستطيل أ هـ و ى - مساحة نصف الدائرة

$١٠\frac{٥}{٧}$ = نق × ٢نق - $\frac{١}{٢} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢}

$\frac{٧٥}{٧}$ = ٢ نق^{٢} - $\frac{١١}{٧}$ نق^{٢} = $\frac{٣}{٧}$ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٢٥ ∴ نق = ٥سم

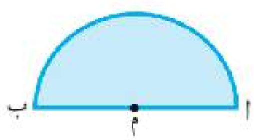
محيط الجزء باللون الأصفر = (أهـ + أى + ى و) + $\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة

= (٥ + ١٠ + ٥) + $\frac{١}{٢} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٥$ = $٣٥\frac{٥}{٧}$سم

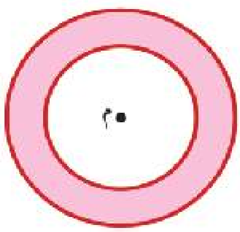
تدرب

١ دائرةٌ مساحتها ٦٤ π سم^{٢}. أوجد طولَ نصف قطرها ، ثم أوجد محيطها لأقرب عددٍ صحيحٍ ($\pi \simeq ٣,١٤$).

٢ **فى الشكلِ المقابل:** $\overline{أب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ١٢,٣٢سم^{٢} أوجد محيط الشكل.

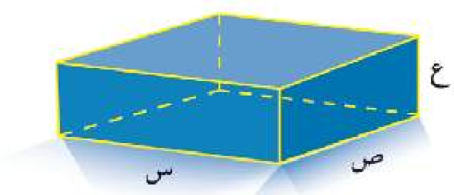


٣ **فى الشكلِ المقابل:** دائرتان متحدتان فى المركز م طول نصفى قطريهما ٣سم ، ٥سم.
أوجد مساحة الجزء الملون بدلالة π.



متوازى المستطيلات

هو مجسمٌ جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل،
وكل وجهين متقابلين متطابقان
إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص، ع فإن:



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة

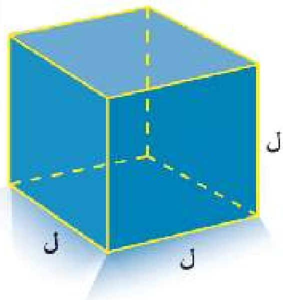
المساحةُ الكليةُ = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

المساحة الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع) وحدة مربعة

حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم متوازى المستطيلات = س × ص × ع وحدة مكعبة

حالة خاصة: المكعب



هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن

مساحة كل وجه = $ل^{٢}$ وحدة مربعة	**مساحته الجانبية = ٤ $ل^{٢}$** وحدة مربعة
مساحته الكلية = ٦$ل^{٢}$ وحدة مربعة	**حجم المكعب = $ل^{٣}$** وحدة مكعبة

مثال

أوجد المساحةَ الكليةَ لمكعبٍ حجمه ١٢٥سم^{٣}

الحل

حجم المكعب = $ل^{٣}$ ∴ ١٢٥ = $ل^{٣}$ ∴ ل = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥سم

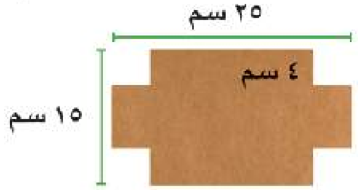
المساحة الكلية = ٦$ل^{٢}$ = ٦ × $(٥)^{٢}$ = ١٥٠سم^{٢}

تدرب

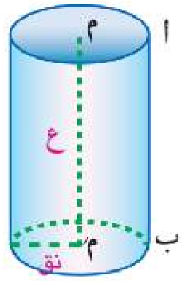
١ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠سم٣ وارتفاعه ٥سم **أوجد مساحته الكلية.**

٢ **أيهما أكبر حجمًا**: مكعب مساحته الكلية ٢٩٤سم^{٢} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥سم.

٣ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥، ١٥سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤سم. ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازى مستطيلات، أوجد حجمه ومساحته الكلية.



الأسطوانةُ الدائريَّةُ القائمةُ



هى مجسمٌ له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرةٍ، أما السطحُ الجانبىُّ فهو سطحٌ منحن يسمى سطح الأسطوانة.

- إذا كانت م، مَ مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن م مَ هو ارتفاع الأسطوانة.

هيا نفكر إذا كانت أ ∈ الدائرة م، ب ∈ الدائرة مَ ، $\overline{أب}$ // $\overline{م مَ}$

- و قطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{أب}$

وبسطنا هذا السطحَ فإننا نحصلُ على سطحِ المستطيل أ ب بَ أَ

ويكون أ ب = ارتفاع الأسطوانة ، أأَ = محيط قاعدة الأسطوانة.

مساحة المستطيل أ ب بَ أَ = المساحة الجانبيةُ للأسطوانة.

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحةُ القاعدة × الارتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مربعة

مثال

قطعةٌ من الورقِ على شكلِ مستطيل أ ب جـ ى ، فيه أ ب = ١٠سم، ب جـ = ٤٤سم، طويت على شكل أسطوانةٍ دائريةٍ قائمةٍ، بحيث ينطبقُ $\overline{أب}$ على ى جـ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$).

الحل

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤سم.

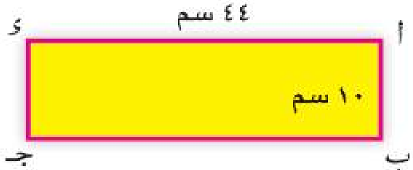
٢ π نق = ٤٤

٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق = ٤٤

∴ نق = ٧سم

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ١٠ = ١٥٤٠سم^{٣}



تدرب

١ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ، طول نصف قطر قاعدتها ١٤سم، وارتفاعها ٢٠سم. أوجد حجمَها ومساحتها الكلية.

٢ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمها ٧٥٣٦سم^{٣} ، وارتفاعها ٢٤سم أوجد مساحتها الكلية ($\pi \simeq ٣,١٤$)

٣ أيهما أكبر حجمًا: أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١٠سم، أم مكعب طول حرفه ١١سم.

الكرة

هى مجسمٌ سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة).

إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دَائرةٌ مركزها هو مركز الكرة ، وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة نق.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\,\pi$ نق^{٣} وحدة مكعبة.

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة.

مثال

كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\,\pi$ نق^{٣}

٥٦٢,٥ π = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

$\therefore$ نق^{٣} = ٥٦٢,٥ $\times \frac{٣}{٤}$ = ٤٢١,٨٧٥

نق = $\sqrt[٣]{٤٢١,٨٧٥}$ = ٧,٥سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ $\times$ π (٧,٥)^{٢} = ٢٢٥π سم^{٢}

تدرب

أوجد الحجمَ ومساحةَ السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

الوحدة الأولى
الدرس الحادى عشر
حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

فكر وناقش

سوف تتعلم
- حل المعادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد.

المصطلحات الأساسية
- المعادلة.
- الدرجة المعادلة.
- المتباينة.
- الدرجة المتباينة.
- حل المعادلة.
- حل المتباينة.

أولاً:حل المعادلاتِ من الدرجة الأولى فى متغيرٍ واحد فى ح

نعلم أن المعادلة ٣ س - ٢ = ٤ **تسمى معادلة من الدرجة الأولى**

حيث أن س المتغير (المجهول)

ولحل هذه المعادلة فى ح

٣ س - ٢ = ٤   **بإضافة ٢ إلى طرفى المعادلة**

٣ س = ٦   **ويمكن الضرب فى المعكوس الضربى لمعامل س**

$\frac{١}{٣}$ × ٣ س = $\frac{١}{٣}$ × ٦

∴ س = ٢

أى أن مجموعة الحل = { ٢ }

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل

أمثلة

١ **أوجد** فى ح مجموع حل المعادلة $\sqrt{٣}$ س - ١ = ٢ ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل

$\sqrt{٣}$ س - ١ = ٢   ∴ $\sqrt{٣}$ س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ∴ س = $\sqrt{٣}$ ∈ ح

مجموعة الحل هى { $\sqrt{٣}$ }

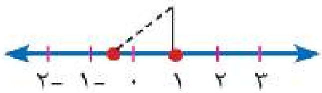
و يمثل الحلُ على خطِّ الأعداد كما بالشكل المقابل.

٢ **أوجد** في ح مجموعة حل المعادلة س + √٢ = ١ ، ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل

س + √٢ = ١ ∴ س = ١ - √٢ ∈ ح

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل.



تدرب

١ **أوجد** في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثّل الحل على خط الأعداد.

أ ٥س + ٦ = ١ ب ٢ س + ٤ = ٣ جـ ٢ س - ٣ = ٤

د س + ٥ = ٠ هـ √٢ س - ١ = ١ و س - ١ = √٥

ثانيًا: حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح وتمثيل الحل على خط الأعداد.

الخواص التالية تستخدم لحل المتباينة في ح وتكتب مجموعة الحل على صورة فترة:

إذا كانت أ ، ب، جـ أعدادًا حقيقيّة وكان أ < ب فإن:

١ أ + جـ < ب + جـ. **خاصية الإضافة.**

٢ إذا كانت جـ > ٠ فإن أ × جـ < ب × جـ. **خاصية الضرب في عدد حقيقيّ موجب.**

٣ إذا كان جـ < ٠ فإن أ × جـ > ب × جـ. **خاصية الضرب في عدد حقيقي سالب.**

أمثلة

١ **أوجد** مجموعة حل المتباينة ٢ س - ١ ⩾ ٥ في ح ومثل الحل بيانيًّا.

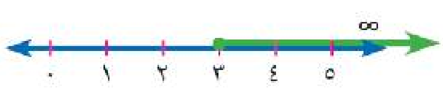
الحل

بإضافة ١ إلى طرفي المتباينة تصبح ٢ س ⩾ ٦

بضرب طرفي المتباينة في ($\frac{١}{٢}$ > ٠) س ⩾ ٣

∴ مجموعة الحل في ح هي [٣ ، ∞[

و يمثلها الشعاع باللون الأخضر على خط الأعداد.



٢ **أوجد** **في ح مجموعةَ حلِّ المتباينة ٥ – ٣ س > ١١، ومثِّل الحلَّ بيانيًّا.**

الحل

بإضافة (-٥) إلى طرفي المتباينة فيكون -٣ س > ٦

بضرب طرفي المتباينة في (- ١/٣) ينتج أن:

∴ س < -٢

أي أن مجموعة الحل في ح هي]- ∞ ، -٢[

ويمثلها الجزء باللون الأخضر على خط الأعداد

٣ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة -٣ ≤ ٢س -١ < ٥ ومثل الحل بيانيًّا

الحل

بإضافة (١) إلى حدود المتباينة -٣ + ١ ≤ ٢س -١ + ١ < ٥ + ١

أي -٢ ≤ ٢ س < ٦، وبضرب حدود المتباينة في (١/٢ > ٠)

-١ ≤ س < ٣

∴ مجموعة الحل في ح هي [-١، ٣[

ويمثلها على خطِّ الأعداد الجزءُ باللون الأخضر.

في مثال ٣ ما مجموعةُ حلِّ المتباينة في ط؟

ما مجموعةُ حلِّ المتباينة في ص؟

٤ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ ≤ ٥س + ٣ < ٢س + ٩ ومثل الحل بيانيا :

الحل

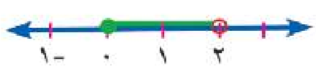
٢س + ٣ ≤ ٥س + ٣ < ٢س + ٩ بإضافة (-٢س)

٣ ≤ ٣س + ٣ < ٩ بإضافة (-٣)

٠ ≤ ٣س < ٦ يضرب حدود المتباينة

٠ ≤ س < ٢

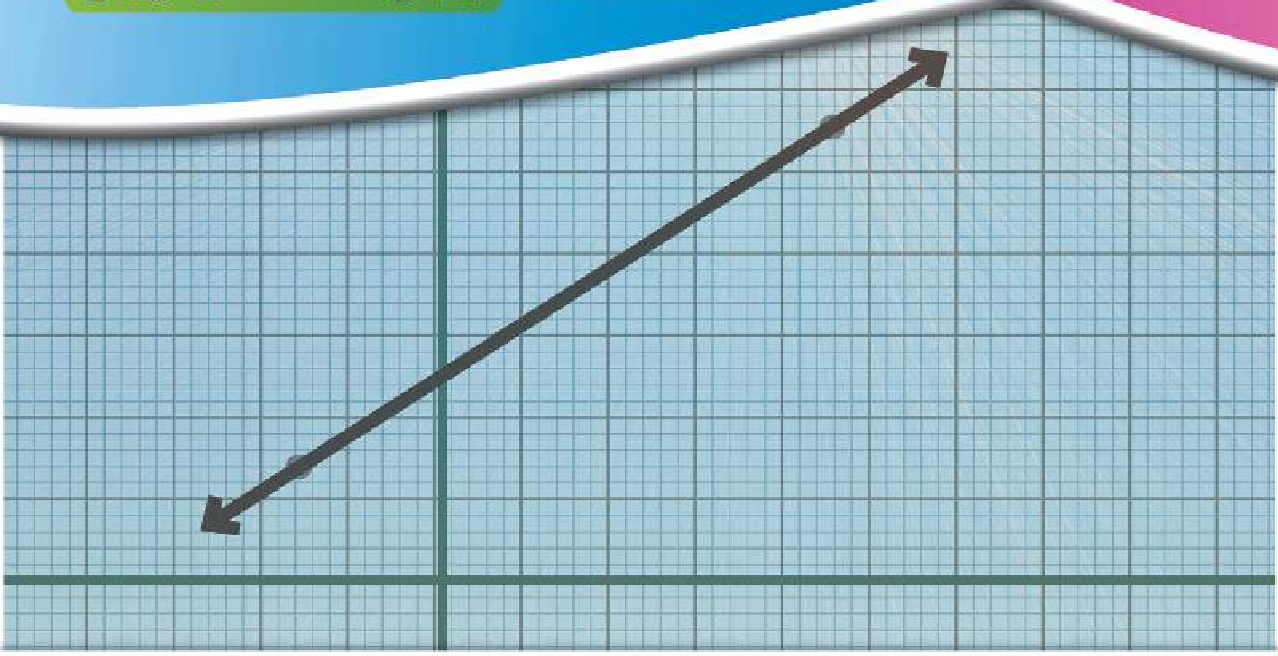
مجموعة الحل في ح هي [٠ ، ٢[



الوحدة الثانية

٢

العلاقة بين متغيرين



الوحدة الثانية

الدرس الأول

العلاقةُ بين متغيِّرينِ

فكِّر وناقِش

يمتلك شخصٌ أوراقًا مالية فئة ٥٠ جنيهًا، وأوراقًا مالية فئة ٢٠ جنيهًا، فإذا اشترى هذا الشخص جهازًا كهربائيًا ثمنه ٣٩٠ جنيهًا.

فكر: كم عدد الأوراق من كل نوع التى يعطيها للبائع؟

نفرض أن س: عدد الأوراق فئة ٥٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٥٠س جنيهًا.

وأن ص: عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٢٠ص جنيهًا.

والمطلوب: معرفة س، ص التى تجعل: **٥٠س + ٢٠ص = ٣٩٠**

تسمى هذه العلاقةُ **معادلة من الدرجة الأولى**، فى متغيرين يمكن قسمةُ طرفى المعادلة على ١٠ فنحصل على معادلة مكافئة لها، وهى:

٥س + ٢ص = ٣٩

وتكون ص = $\frac{\text{٣٩ - ٥س}}{\text{٢}}$

لاحظ أن: كل من س، ص أعداد طبيعية، وفى هذه الحالة تكونَ س عددًا فرديًا.

يمكن تكوينُ الجدولِ المقابل لمعرفة الإمكانات المختلفة وهى:

يعطى البائع ورقة واحدة فئة ٥٠ جنيهًا، ١٧ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٣ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ١٢ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٥ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ٧ ورقات فئة ٢٠ جنيهًا .

أو ٧ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ورقتين فئة ٢٠ جنيهًا.

س	ص	(س،ص)
١	١٧	(١، ١٧)
٣	١٢	(٣، ١٢)
٥	٧	(٥، ٧)
٧	٢	(٧، ٢)
٩	سالبة	لاتصلح

سوف تتعلم

- العلاقةُ بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- التمثيلُ البيانيُّ للعلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

مصطلحات أساسية

- متغير.
- علاقة.
- معادلة من الدرجة الأولى.

تدرب

١ مع شخص أوراقٌ ماليةٌ فئة ٥ جنيهات، وأوراقٌ ماليةٌ فئة ٢٠ جنيهًا. اشترى هذا الشخص من المركز التّجارى بما قيمته ٧٥ جنيهًا، ما الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه؟

٢ مثلثٌ متساوى الساقين، محيطه ١٩سم، ما الإمكاناتُ المختلفةُ لأطوالِ أضلاعه، علمًا بأن أطوالَ أضلاعه ∈ ص+

لاحظ أن: مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

دراسةُ العلاقةِ بين متغيّرين

أ س + ب ص = جـ حيث أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ تسمى **عَلاقة خطية** بين المتغيرين س، ص

ويمكن إيجادُ مجموعةٍ من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقِّق هذه العلاقةَ.

مثلاً:

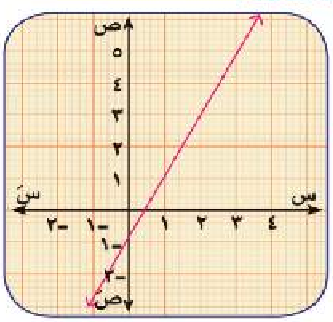
بدراسة العلاقة ٢س − ص = ١

عند س = ١	تكون ص = ١	∴ (١، ١)	تحقق العلاقة
عند س = ٠	تكون ص = −١	∴ (٠، −١)	تحقق العلاقة
عند س = ٣	تكون ص = ٥	∴ (٣، ٥)	تحقق العلاقة
عند س = −١	تكون ص = −٣	(−١، −٣)	تحقق العلاقة

وهكذا نجدُ أن هناك عددًا لانهائى من الأزواج المرتبة التى تحقِّق هذه العلاقة.

لاحظ أن:

- يمكن تمثيلُ العلاقة ٢س − ص = ١، بيانيًّا باستخدام بعض الأزواج المرتبة التى حصلنا عليها.
- كل نقطة ∈ الخط المستقيم باللون الأحمر، يمثلها زوجٌ مرتبٌ يحقِّق العَلاقة ٢س − ص = ١.



تدرب

١ أوجد أربع أزواج مرتبة تحقق كلًّا من العلاقات الآتية ، ومثلها بيانيًّا:

أ س + ص = ٣ ب س - ٢ص = ٥

جـ ص = ٢ د س = ١

٢ إذا كان (-٣، ٢) تحقق العلاقة ٣ س + ب ص =١، فأوجد قيمة ب.

٣ إذا كان (ك، ٢ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥ ، فأوجد قيمة ك.

التمثيل البيانيُّ للعلاقة بين متغيرين

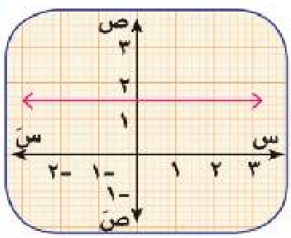
العلاقة أ س + ب ص = جـ حيث أ، ب كلاهما معًا ≠٠ تسمى علاقة بين المتغيرين س ، ص ويمثلها بيانيًّا خط مستقيم.

إذا كانت أ = ٠

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور السينات.

مثلاً: العلاقة ٢ ص = ٣

أى: ص = $\frac{٣}{٢}$



يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) ويكون موازيًا لمحور السينات.

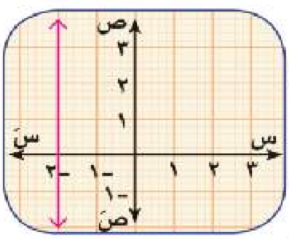
حالة خاصة:

العَلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

إذا كانت ب = ٠

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور الصادات.

مثلاً: العلاقة س = -٢



يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (-٢، ٠) ويكون موازيًا لمحور الصادات.

حالة خاصة:

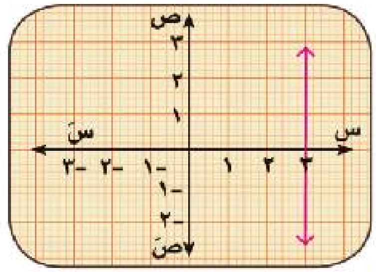
العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

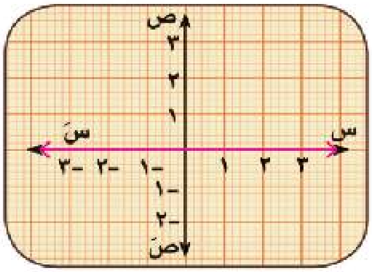
تدرب

١ مثل بيانيًّا كلًّا من العلاقات الآتية:

أ ٢س = ٥ ب ص + ١ = ٠

٢ أوجد العلاقةَ التى يمثلها الخطُّ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ فى كلًّا من الشكلين التاليين:





مثال

مثل بيانيًّا العلاقة: س + ٢ ص = ٣

الحل

يمكن اختيارُ مجموعةٍ من الأزواج المرّتبة التى تحقّق هذه العلاقة:

مثلا: بوضع ص = ٢ ∴ س = -١ (-١ ، ٢) **يحقق العلاقة**

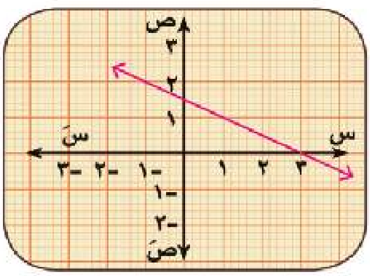
بوضع ص = ٠ ∴ س = ٣ (٣ ، ٠) **يحقق العلاقة**

بوضع ص = -١ ∴ س = ٥ (٥ ، -١) **تحقق العلاقة** وهكذا ..

ويمكن وضعُ هذه النتائج فى صورة جدولٍ كالتالى:

س	-١	٣	٥	٠
ص	٢	٠	-١	$\frac{٣}{٢}$

وتمثل هذه العلاقةُ الخطَّ المستقيمَ باللون الأحمر.



ناقش مع معلمك:

١ ماذا تلاحظُ على تغير قيمة ص كلما زادت قيمة س؟

٢ متى يمرُّ الخطُّ المستقيمُ الممثل للعلاقة أس + ب ص = جـ بنقطة الأصل؟

الوحدة الثانية
الدرس الثانى

ميل الخطِّ المستقيم وتطبيقاتٌ حياتية

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- ميل الخطِّ المستقيم .
- تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميل الخطِّ المستقيم.

مصطلحات أساسية

- ميل.
- ميل موجب.
- ميل سالب.
- الميل يساوى صفرًا.
- الميل غير معرف.

إذا لاحظنا تحرُّك نَقطةٍ على خطٍّ مستقيمٍ من الموضع أ(س$_1$، ص$_1$) إلى الموضع ب (س$_2$، ص$_2$) حيث س$_2$ > س$_1$

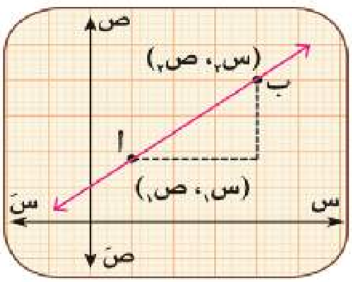
وكل من أ، ب ∋ المستقيم **فإن:**

التغيُّر فى الإحداثى السينى = س$_2$ − س$_1$

ويسمى بالتغير الأفقى

التغير فى الإحداثىِّ الصادىِّ = ص$_2$ − ص$_1$

ويسمى



ميلُ الخطِّ المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

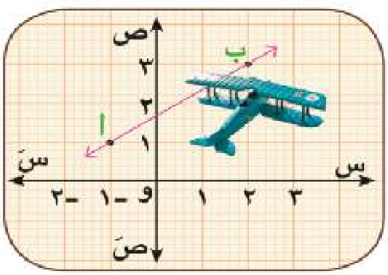
م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ حيث س$_2$ > س$_1$

فى الأمثلةِ الآتية ستدرس الحالاتِ المختلفة للتغير الرأسى (ص$_2$ − ص$_1$):

مثال ١

إذا كانت: أ = (-١، ١)، ب = (٢، ٣).

فإن: ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٢}{٣}$



تلاحظ أن:

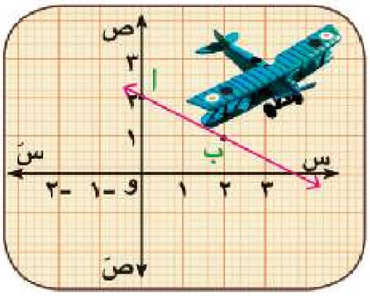
١ تحركت نقطة أ على الخطِّ المستقيمِ لأعلى لتصلَ إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ > ص_١$ ٣ الميل موجب.

مثال ٢

إذا كانت: أ (٠، ٢)، ب (٢، ١)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = -\frac{١}{٢}$



تلاحظ أن:

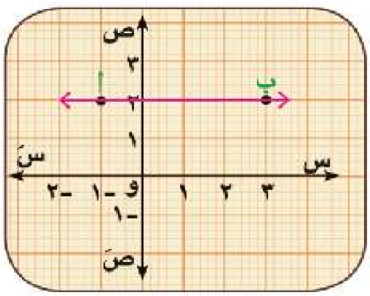
١ تحركت نقطةُ أ على المستقيمِ لأسفل لتصل إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ < ص_١$ ٣ الميل سالب.

مثال ٣

إذا كانت: أ (-١، ٢) ، ب (٣، ٢)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٢}{٣ - (-١)} = \frac{صفر}{٤} =$ صفرًا.



تلاحظ أن:

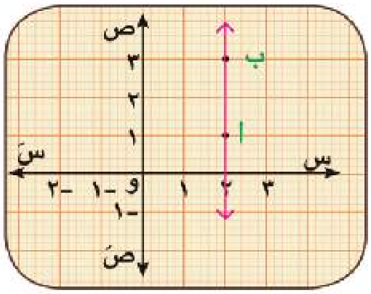
١ تحركت نقطة أ أفقيًّا لتصل إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ = ص_١$ ٣ الميل = صفر.

مثال ٤

إذا كانت: أ = (٢، ١)، ب(٢، ٣) فإننا لانستطيع حسابَ الميل؛ لأن تعريفَ الميلِ يشترطُ وجودَ تغيرٍ فى الإحداثىِّ السينىِّ.

أى: $س_٢ - س_١ \neq ٠$



وتلاحظ أن:

١ تحركت نقطةُ أ رأسيًّا لتصل إلى نقطة ب.

٢ $س_٢ = س_١$ ٣ الميل غير معرف.

تدرب

١ فى كلٍّ من الحالاتِ التالية، أوجد ميلَ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

أ أ (١ ، ٢)، ب (٥، ٠)   ب أ (٢، -١)، ب (٤، -١)

جـ أ (-١ ، ٣)، ب (٢، ١)   د أ (٣، -١)، ب (٣، ٢)

٢ إذا كانت أ (٢، -١)، ب (٣، ٢)، جـ (٤، ٥)، أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، ومثل كلًّا منهما بيانيًّا ماذا تلاحظ؟

٣ **اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ من بين القوسينِ أمامَ كلِّ عبارةٍ:**

أولاً: الجدولُ الآتى يبين علاقة س، ص، وهى:

(ص = س + ٤ أو ص = س + ١ أو ص = ٢س - ١ أو ص = ٣س - ٢)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

ثانيًا: إذا كان (٢، -٥) يحقِّق العلاقة ٣س - ص + جـ = ٠ فإن جـ = ...

(١ أو -١ أو ١١ أو -١١)

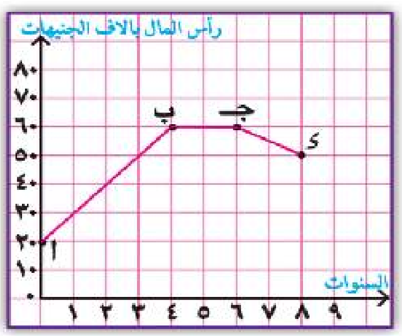
ثالثًا: (٣، ٢) لايحقق العَلاقةَ .... (ص + س = ٥ أو ٣ص - س = ٣ أو ص + س = ٧ أو ص - س = ١)

رابعًا: تستهلك آلةٌ للريِّ ٢,٤٧ من اللتر من السولار؛ لتشغيلها ٣ ساعات، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات، فإنها تستهلك .... من اللتر من السولار.   (٧,٢ أو ٨ أو ٨,٤ أو ٩,٦)

٤ **أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ (-١، ٣)، ب (٢، ٥) هل النقطة جـ (٨، ١) ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$**

تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميلِ الخطِّ المستقيمِ

تطبيق (١)



الشكلُ المقابلُ: يوضِّح تغيرَ رأسِ مالِ شركةٍ خلال ٨ سنوات.

أ أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ما دلالةُ كلٍّ منها؟

ب احسب رأسَ مالِ الشركة عند بدءِ عملها.

الحل

أ = (٠، ٢٠)، ب = (٤، ٦٠)، جـ = (٦، ٦٠)، ى = (٨، ٥٠)

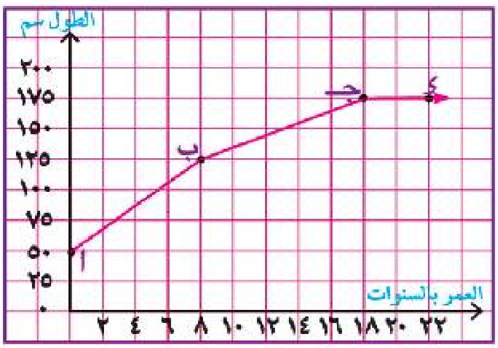
أولًا: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٦٠ - ٢٠}{٤ - ٠}$ = ١٠ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنوات الأربعة الأولى بمعدل ١٠ آلاف جنيه.

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{٦ - ٤}$ = صفر وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتًا خلال السنتين الخامسة والسادسة.

ميل $\overleftrightarrow{جـ ى}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = -٥ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه.

ثانيًا: رأسُ مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى لنقطة أ = ٣٠ ألف جنيه.

تدرب

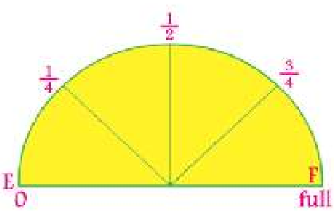


الشكلُ المقابلُ يوضِّحُ العلاقة بين طولِ شخصٍ (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات.

أولاً: أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{جـ ى}$ وما دلالةُ كلٍّ منها؟

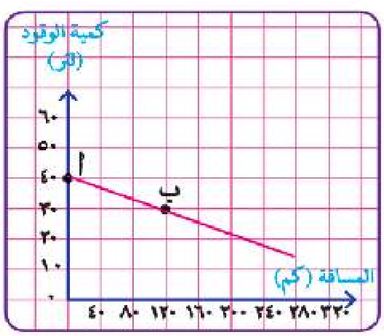
ثانيًا: احسب الفرقَ بين طولِ هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

تطبيق (٢)



ملأ حازم خزانَ سيارته بالوقود، وسعةُ هذا الخزان ٤٠ لترًا ، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم ، وجد أن المؤشِّر يوضِّح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ سعة الخزان، ارسم الشكلَ البيانيَّ الذى يوضِّح العَلاقة بين كميةِ الوقود بالخزان والمسافة التى قطعتها السيارة (علما بأن هذه العلاقة خطية)، واحسب المسافة التى تقطعُها السيارةُ حتى يفرغ الخزانُ.

الحل



عند البدء: أ (٠ ، ٤٠)

المسافة المقطوعة — كمية الوقود المستخدمة

بعد قطع ١٢٠ كم ب = (١٢٠ ، ٣٠)

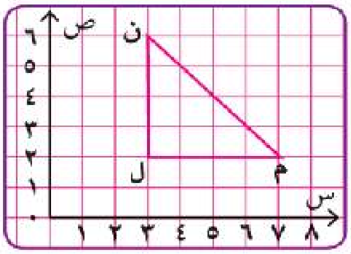
ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{١٢٠ - ٠}$ = $\frac{-١}{١٢}$

هذا الميلُ يعنى أن كميةَ الوقودِ بالخزان تنقصُ بمعدلِ لترٍ واحد كل ١٢ كم.

يفرغ الخزانُ عندما تقطعُ السيارةُ مسافةَ = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}} = \frac{٤٠}{\frac{١}{١٢}}$

$= ٤٠ \times \frac{١٢}{١} = ٤٨٠$ كم.

لاحظ أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطع مُحورَ المسافة فى النقطة (٤٨٠، ٠) **وهى تعبِّر عن المطلوب.**



٥ فى الشكل المقابل:

ل م ن مثلثَ قائم الزاوية فى ل ، ق ($\angle$ م) = ٤٥° فإذا كان ل (٣، ٢)، م (٧، ٢) أوجد إحداثى ن واحسب ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.

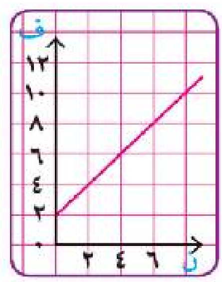
الحل

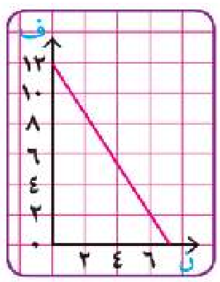
إحداثى ن = (٣ ، ٦)

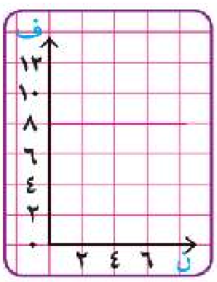
ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}} = \frac{٦ - ٢}{٣ - ٧} = \frac{٤}{-٤} = -١$

٦ كلٌّ من الأشكال التالية يوضِّحُ العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم.

حدد موضعَ الجسمِ عند بدأ الحركة، وعند ن = ٦ ثوان ، وأوجد ميلَ المستقيم فى كلِّ حالةٍ (ماذا يمثل الميل؟).







ناقِشْ معلمك فى حل رقم ٦

الوحدة الثالثة

٣

الإحصاء

الوحدة الثالثة

الدرس الأول

جمع البيانات وتنظيمها

فكِّر وناقِش

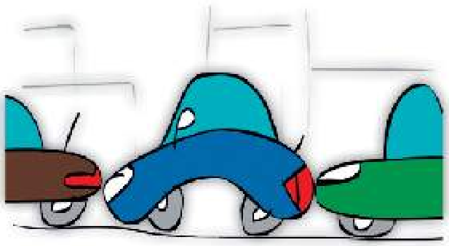
سوف تتعلم

- كيفية جمع البيانات وتنظيمها في جداول تكرارية ذات مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- جمع البيانات.
- تنظيم البيانات.
- جدول تكرارى ذو مجموعات.

إذا بحثت ظاهرةَ التكدُّس المرورى وطرق علاجه:



- ما مصادرُك للحصول على البيانات؟
- كيف يمكنك جمعُ البياناتِ حول هذه الظاهرة؟
- ما الطرقُ الإحصائيةُ التى سوف تستخدمها لتحليلِ البيانات؟
- هل تستطيعُ تفسيرَ النتائج التى توصلت إليها؟
- ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة وتحقيق السيولة المروريَّة؟

جمع البيانات

عمل تعاونى تعاون مع زملائك فى جمع البيانات من مصادرها بتوزيع الأدوار:

أ **المجموعة الأولى:** اجمع بيانات ابتدائية عن الظاهرة محلِّ الدراسة عن طريق استبيان تدور أسئلته حول (وسيلة المواصلات المستخدمة فى التنقل - حالة الطرق - زمن التكدس المرورى - وجود إشارات استرشادية على الطرق - التواجد الأمنى).

ب **المجموعة الثانية:** اجمع بيانات ثانوية عن الظاهرة محلِّ الدراسة من النشرات المرورية - الإنترنت - مصادر الإعلام.

جـ **المجموعة الثالثة:** لاحظ أى الطرق أكثر ازدحامًا، وسلوك قائدى السيارات والتزامهم بقوانين المرور، ومدى التزام المشاة بآداب الطريق، وعبور الطرق من المناطق المعدة لعبور المشاة.

تنظيمُ وتحليل البيانات

تعاون مع زملائك فى إعداد جدولٍ تكرارىٍّ لوسيلة المواصلات التى يستخدمها زملاؤك.

وسيلة المواصلات	مترو	حافلة	سيارة خاصة	تاكسى	دراجة	سيرًا على الأقدام	المجموع
التكرار	....	....	....	....	....	....	....

حدِّد الوسيلة الأكثر استخدامًا (المنوال)

١ هل هذه الوسيلةُ مناسبةٌ؟ هل تساعدُ فى علاج ظاهرةِ التكدُّس المرورى؟ لماذا؟

٢ ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة فى ضوء ماتوصلت إليه من نتائج؟

تنظيمُ البيانات وعرضها فى جداول تكراريَّة

مثال

فيمايلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالبًا فى إحدى الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

المطلوب: تكوينُ الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات .

الحل

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نوجد أكبر قيمة لهذه البيانات و أصغر قيمة لها؟

باعتبار مجموعة البيانات السابقة هى سـ

فإن: سـ = {س : ٢ ≤ س ≤ ١٩}

أى أن: قيم سـ تبدأمن ٢ وتنتهى عند ١٩

أى أن: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٩ - ٢ = ١٧

ثانيًا: تجزَّأ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى وليكن ٦ مجموعات.

∴ مدى المجموعة = $\frac{١٧}{٦}$ تقترب من ٣

ثالثًا: تصبح المجموعاتُ الجزئية كالتالى.

المجموعة الأولى	٢ -	المجموعة الثالثة	٨ -
المجموعة الثانية	٥ -	المجموعة الرابعة	١١ - وهكذا

لاحظ أن ٢ - معناها مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٢ والأقل من ٥ وهكذا.

رابعًا: تسجل البيانات فى الجدول التالى:

المجموعة	العلامات	التكرار
٢ -	////	٤
٥ -	𝍸 /	٦
٨ -	𝍸 //	٧
١١ -	𝍸 ///	٨
١٤ -	///	٣
١٧ -	//	٢
المجموع		٣٠

خامسًا: يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات، ويمكن كتابته رأسيًا أو أفقيًا والصورة الأفقية للجدول هى كالآتى:

المجموعة	٢ -	٥ -	٨ -	١١ -	١٤ -	١٧ -	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠

الوحدة الثالثة

الدرس الثانى

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًا

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- كيفية تكوين كلٍّ من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- التمثيل البيانى لكلٍّ من الجدول التكرارىّ المتجمع الصاعد والنازل.

المصطلحات الأساسية

- توزيع تكرارى.
- جدول تكرارى.
- جدول تكرارى متجمع صاعد.
- جدول تكرارى متجمع نازل.
- منحنى تكرارى متجمع صاعد.
- منحنى تكرارى متجمع نازل.

أولاً: الجدولُ التَّكراريُّ المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيّا

مثال

يبين الجدول الآتى التوزيعَ التكراريَّ لأطوال ١٠٠ تلميذ بالسنتيمترات فى إحدى المدارس:

(مجموعات) الطول بالسنتيمتر	١١٥-	١٢٠-	١٢٥-	١٣٠-	١٣٥-	١٤٠-	١٤٥-	المجموع
عدد التلاميذ (التكرار)	٨	١٢	١٩	٢٣	١٨	١٣	٧	١٠٠

١ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟
٢ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟
٣ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟

كوِّن الجدولَ التكراريَّ المتجمعَ الصاعد لهذه البيانات ومثله بيانيًا

الحل

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟ **لا**

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟ وما عددهم؟ **نعم ، ٦٢ تلميذًا.**

كيف توجد عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟ **نجمع عدد التلاميذ فى مجموعات الطول الأقل من المجموعة ١٤٥**

و الآن للإجابة عن التساؤلات السابقة بطريقةٍ أكثر سهولة نكون الجدولَ التكراريَّ المتجمعَ الصاعدَ ، وذلك كالتالى:

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	٠
أقل من ١٢٠	٠ + ٨ = ٨
أقل من ١٢٥	٨ + ١٢ = ٢٠
أقل من ١٣٠	٢٠ + ١٩ = ٣٩
أقل من ١٣٥	٣٩ + ٢٣ = ٦٢
أقل من ١٤٠	٦٢ + ١٨ = ٨٠
أقل من ١٤٥	٨٠ + ١٣ = ٩٣
أقل من ١٥٠	٩٣ + ٧ = ١٠٠

أى

جدول التكرار المتجمع الصاعد	
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	صفر
أقل من ١٢٠	٨
أقل من ١٢٥	٢٠
أقل من ١٣٠	٣٩
أقل من ١٣٥	٦٢
أقل من ١٤٠	٨٠
أقل من ١٤٥	٩٣
أقل من ١٥٠	١٠٠

ولتمثيل الجداولِ التكراريّ المتجمِع الصّاعد بيانيًّا:

١ نخصص المحور الأفقىَّ للمجموعاتِ والمحورَ الرأسىَّ للتَّكرار المتجمع الصاعد.

٢ نختار مقياسًا للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحورُ للتكرارِ الكلى المتجمع الصاعد عدد عناصر المجموعة.

٣ نمثل التكرارَ المتجمعَ الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البيانى لها بالتتابع.

ثانيًا الجدولُ التكراريُّ المتجمِّعُ النازل وتمثيله بيانيًا :

من التوزيع التكرارى السابق ، والذى يبين أطوال ١٠٠ طالب بالسنتيمترات فى إحدى المدارس.

أوجد: عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر.

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع النازل، ثم مثله بيانيًا.

الحل

لايوجد تلاميذ أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر هو ٧ + ١٣ = ٢٠ طالبًا

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر هو

أكمل: ١٩ + ... + ... + ... + ... = ...

للإجابة عن هذه التساؤلات بصورة أكثر سهولة نكون الجدول التكرارى المتجمع النازل كالآتى:

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١١٥ فأكثر	٩٢ + ٨ = ١٠٠
١٢٠ فأكثر	٨٠ + ١٢ = ٩٢
١٢٥ فأكثر	٦١ + ١٩ = ٨٠
١٣٠ فأكثر	٣٨ + ٢٣ = ٦١
١٣٥ فأكثر	٢٠ + ١٨ = ٣٨
١٤٠ فأكثر	٧ + ١٣ = ٢٠
١٤٥ فأكثر	٠ + ٧ = ٧
١٥٠ فأكثر	٠

جدول التكرار المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
١١٥ فأكثر	١٠٠
١٢٠ فأكثر	٩٢
١٢٥ فأكثر	٨٠
١٣٠ فأكثر	٦١
١٣٥ فأكثر	٣٨
١٤٠ فأكثر	٢٠
١٤٥ فأكثر	٧
١٥٠ فأكثر	صفر

ولتمثيل هذا الجدول بيانيًّا نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، وذلك لنحصل على التمثيل البيانى التالى:

تدرب

الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملا بأحد المطابع :

المجموعات	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -
التكرار	٦	٧	١٠	....	٩	٣	٥

المطلوب:

أ أكمل الجدول.

ب ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

جـ من الرسم أوجد :

أولا : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٥ سنة.

ثانيا : عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٥ سنة.

ناقش معلمك فى الحل

الوحدة الثالثة

الدرس الثالث

الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال

فكر وناقش

أولاً: الوسطُ الحسابىُّ

سبق أن درستَ كيفية إيجاد الوسط الحسابى لمجموعة من القيم وعلمت أن:

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

فمثلاً: إذا كان أعمار ٥ تلاميذ هى ١٣، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧ سنة فإن:

الوسط الحسابى لأعمارهم = $\frac{١٣+١٥+١٦+١٤+١٧}{٥}$

= $\frac{٧٥}{٥}$ = ١٥ سنة

لاحظ أن: ١٥ × ٥ = ١٣ + ١٥ + ١٦ + ١٤ + ١٧

الوسطُ الحسابىُ: هو أبسطُ المتوسطات جميعًا، وأكثرها تداولًا، وهو القيمة التى لو أعطيت لكلِّ مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية، ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم نقسم على عدد المفردات.

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الوسط الحسابى من جدولٍ تكراريٍّ ذى مجموعات
- كيفية حساب الوسيط من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.
- كيفية حساب المنوال من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- وسط حسابى.
- وسيط.
- مدرج تكرارى.
- منوال.

إيجادُ الوسط الحسابى لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات:

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

لاحظ: لإيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات نتبع الخطوات التالية:

❶ **نحدِّد مراكزَ المجموعات:**

مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = ١٥ . مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢}$ = ٢٥ ... وهكذا

ونظرًا لأن مدى المجموعات الجزئية متساو، وكل منها = ١٠

نعتبر الحدَّ الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون:

$$\text{مركزها} = \frac{٥٠ + ٦٠}{٢} = ٥٥$$

❷ **نكون الجدولَ الرأسى الآتى:**

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	مركزالمجموعة × التكرار م × ك
- ١٠	١٥	١٠	١٥٠
- ٢٠	٢٥	٢٠	٥٠٠
- ٣٠	٣٥	٢٥	٨٧٥
- ٤٠	٤٥	٣٠	١٣٥٠
- ٥٠	٥٥	١٥	٨٢٥
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

❸ **الوسطُ الحسابىُّ** = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$

= $\frac{٣٧٠٠}{١٠٠}$ = ٣٧

تدرب

١ إذا كان الوسطُ الحسابىُّ لدرجات تلميذ فى الخمسة أشهر الأولى هى ٢٣,٨ فما الدرجة التى يجب أن يحصل عليها فى الشهر السادس ليكون الوسط الحسابى لدرجاته ٢٤ درجة؟

٢ **فيما يلى التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلًا بالكيلوجرامات.**

الوزن بالكيلو جرام	- ٦	- ١٠	- ١٤	- ١٨	-٢٢	- ٢٦	- ٣٠	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

ثانيًا: الوسيط

هو القيمةُ التى تتوسط مجموعةَ المفردات بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا بحيث يكون عددُ القيم الأصغر منها مساويًّا لعددِ القيم الأكبر منها.

إيجادُ الوسيط لتوزيعٍ تكرارىٍّ ذى المجموعات بيانيًا:

١ ننشأ الجدولَ التكراريَّ المتجمعَ الصاعدَ أو النازل ، ثم نرسُم المنحنى التّكرارى المتجمع له.

٢ **نحدِّد ترتيب الوسيط** = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$.

٣ نحدِّد النقطة أ على المحور الرأسى(التكرار) والتى تمثِّل ترتيب الوسيط.

٤ نرسُمُ مستقيمًا أفقيًّا من نقطة أ فيقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عمودًا على المحور الأفقى ؛ ليقطعه فى نقطة تمثل الوسيط.

مثال ١

التوزيعُ التكراريُّ الآتى يبين درجات ٦٠ طالبًا فى أحد الاختبارات

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٦	٩	١٢	١٥	١٠	٥	٣	٦٠

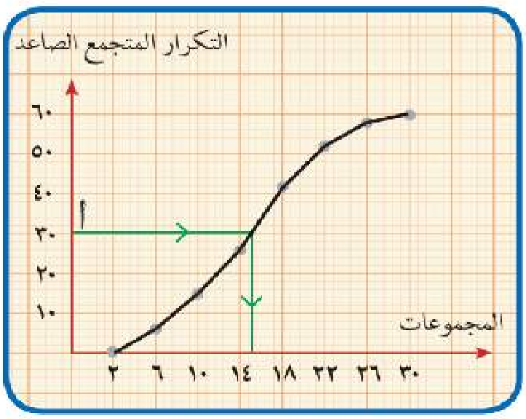
أوجد الوسيطَ لهذا التوزيع مستخدمًا جدول التّكرار المتجمع الصّاعد.

الحل

١ ننشئ الجدولَ التكراريَّ المتجمعَ الصاعدَ. ٢ نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{٦٠}{٢٠}$ = ٣٠

٣ نرسم المنحنى التّكرارى المتجمعَ الصاعد ومن الرسم نوجد الوسيط.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢	صفر
أقل من ٦	٦
أقل من ١٠	١٥
أقل من ١٤	٢٧
أقل من ١٨	٤٢
أقل من ٢٢	٥٢
أقل من ٢٦	٥٧
أقل من ٣٠	٦٠



من الرسم الوسيط = ١٤,٨ من الدرجة

فكّر هل يمكنك إيجادُ الوسيط باستخدام الجدول التكرارى المتجمع النازل؟

هل تختلف قيمة الوسيط فى هذه الحالة.

مثال ٢

التوزيعُ التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الأجر بالجنيه (المجموعات)	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

المطلوب:

١ رسم المنحنيين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع معًا.

٢ هل يمكن إيجادُ الأجر الوسيط من هذا المنحنى؟

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر

لاحظ أن:

المنحنى التكرارى المتجمعُ الصاعُد يتقاطعُ مع المنحنى التّكرارى المتجمع النازل فى نقطة واحدة هى نقطة م .

الإحداثى الرأسى لنقطة م = ٥٠

$= \frac{١٠٠}{٢}$

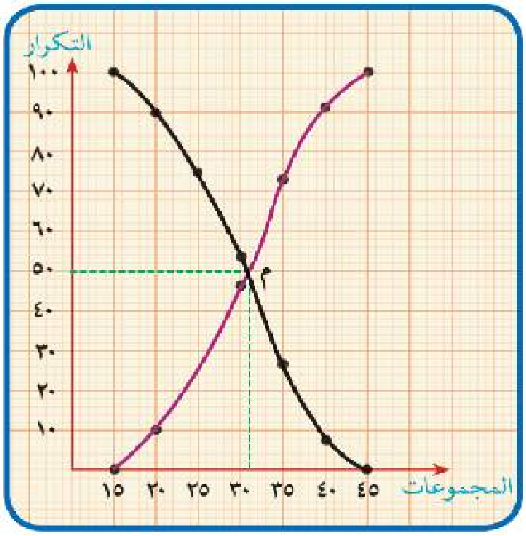
= ترتيب الوسيط

∴ الإحداثىُّ الأفقىُّ لنقطةٍ م يعين الوسيط

كل ١٠مم من المحور الأفقى تمثل ٥ جنيهات

أكمل ٢ مم تمثل ....

الأجر الوسيط = ٣٠ + $\frac{٢ \times ٥}{١٠}$ = ٣١ جنيهًا.



تدرب

ارسم منحنى التَّكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى ثم أوجد قيمة الوسيط.

المجموعات	٥ -	١٠ -	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٧	١٠	٣	٥٠

ثالثًا: المنوال

هو القيمةُ الأكثرُ شيوعًا فى مجموعة المفردات أى القيمة التى تتكرَّر أكثر من غيرها من القيم.

مثال

الجدولُ الآتى يبين التَّوزيعَ التكراريَّ لدرجات ٤٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٣	٥	٨	١٠	٧	٥	٢

أوجد المنوالَ لهذا التَّوزيع بيانيًّا.

الحل

يمكن إيجادُ المنوال لهذا التوزيع بيانيًّا باستخدام المدرِج التكراريِّ ، وذلك كالآتى:

أولاً: ارسم المدرج التكراريَّ

١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًّا لتمثيل المجموعات، والآخر رأسيًّا لتمثيل تكرارِ كلِّ مجموعة.

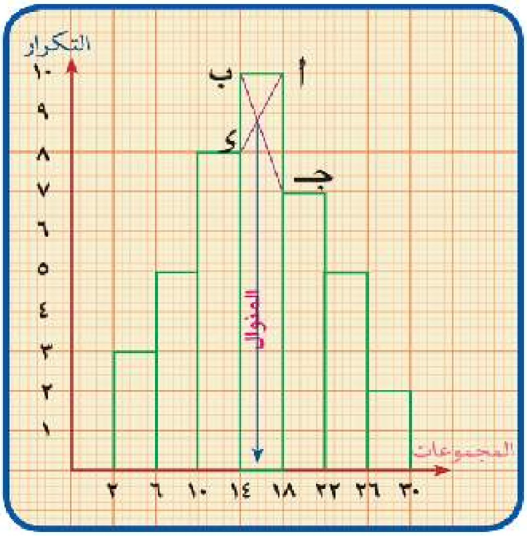
٢ نقسم المحورَ الأفقيَّ إلى عددٍ من الأقسام المتساويةِ بمقياس رسمٍ مناسبٍ لتمثيلِ المجموعات.

٣ نقسم المحورَ الرأسيَّ إلى عددٍ من الأقسامِ المتساوية بمقياسِ رسمٍ مناسبٍ بحيث يمكن تمثيلُ أكبر تكرارٍ في المجموعات.

٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هي المجموعة (٢-) وارتفاعه يساوي التكرار (٣).

٥ نرسم مستطيلاً ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هي المجموعة (٦-) وارتفاعه يساوي التكرار (٥).

٦ نكرِّر رسم باقي المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٢٦-).



ثانيًا: إيجاد المنوال من المدرج التكراري:

لإيجاد المنوال من المدرج التّكراري نلاحظُ أن المجموعة الأكثر تكرارًا هي المجموعة (١٤ -) وتسمى **المجموعة المنوالية**. لماذا؟

نحدِّد نقطة تقاطع $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ من الرسم، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقي يحدد القيمة المنوالية للتوزيع.

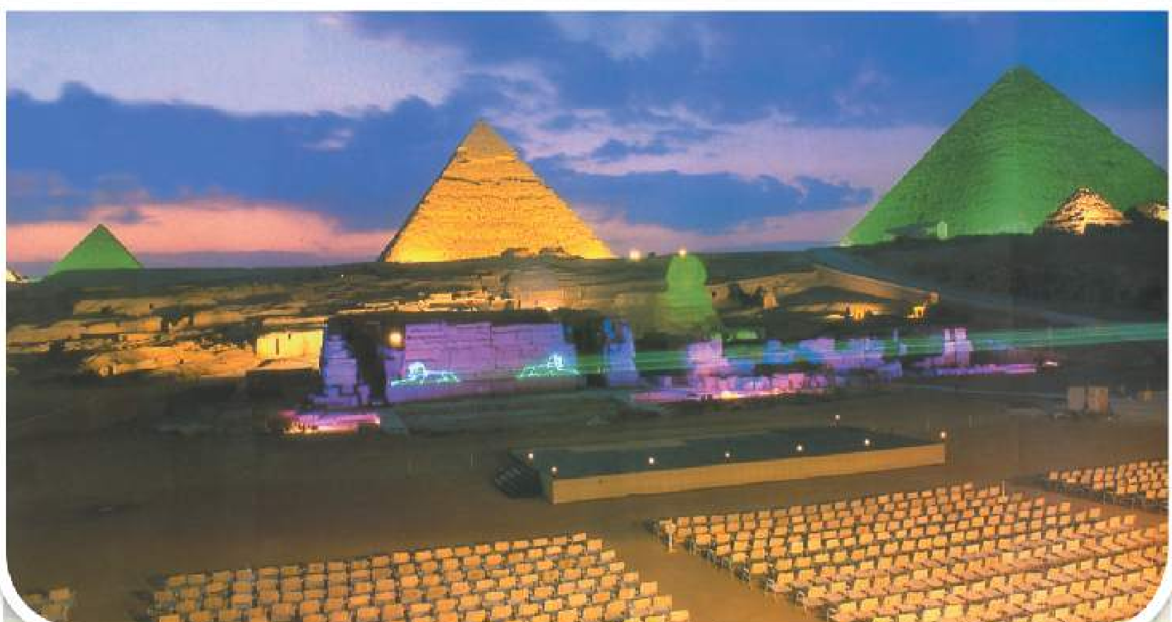
من الرسم ما القيمةُ المنواليةِ؟

ناقِشْ معلمك في الحل

الوحدة الرابعة

٤

متوسطات المثلث
والمثلث المتساوي الساقين



الوحدة الرابعة

الدرس الأول

متوسطات المثلث

فكّر وناقِش

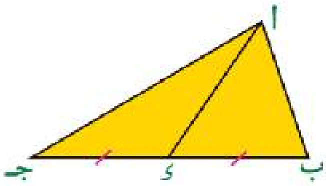
سوف تتعلّم

- متوسطات المثلث
- المثلث الثلاثينى الستينى.

المصطلحات الأساسية

- متوسط للمثلث.
- مثلث ثلاثينى ستينى

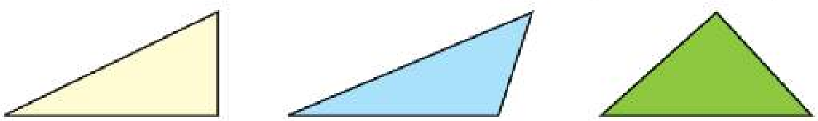
متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.



فى △ أ ب جـ: ∵ ء منتصف ب جـ

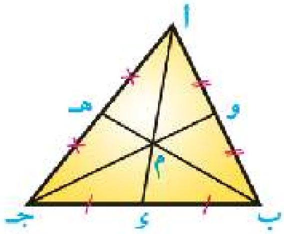
فيكون أ ء متوسط للمثلث

- ماعدد متوسطات أى مثلث؟
- ارسم المتوسطات فى كل من المثلثات التالية:



نظرية (١)

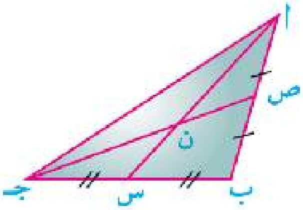
متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة



فى △ أ ب جـ: إذا كانت ء منتصف ب جـ، هـ منتصف أ جـ، و منتصف أ ب .

فإن: أ ء ، ب هـ، جـ و تتقاطع فى نقطة واحدة.

تدرب



فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه س منتصف ب جـ ،

ص منتصف أ ب ، أ س ∩ جـ ص = {ن}.

١ ارسم $\overleftarrow{\text{ب ن}}$ ليقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في ع،
أوجد بالقياس طول $\overline{\text{أ ع}}$ ، طول $\overline{\text{جـ ع}}$.
هل أ ع = جـ ع؟ فسر إجابتك؟

٢ قس الأطوال ثم أكمل:

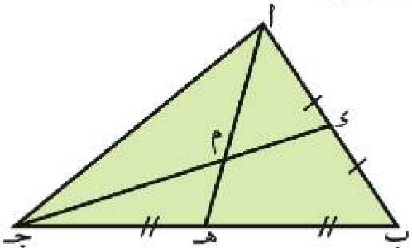
$\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

إذا كانت قياساتك دقيقة فإن $\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{1}{2}$

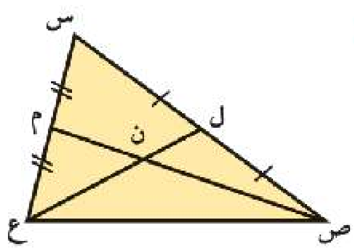
نظرية (٢)
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

تدرب

أكمل

١


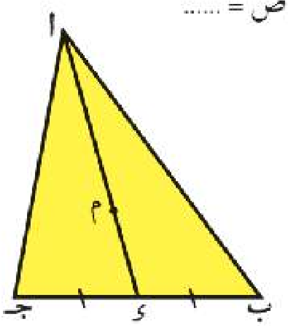
م هـ = ٣سم ، م جـ = ٨سم
م أ = ... ، م ء = ...
م هـ = ... أ هـ ، م جـ = ... جـ ء

٢


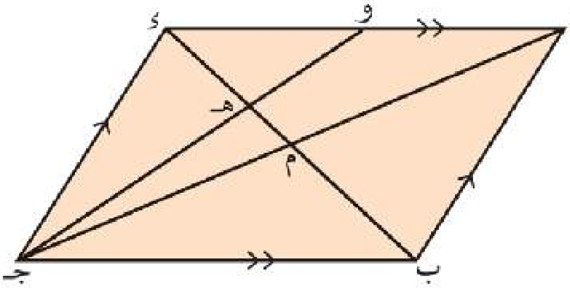
ل ع = ١٥سم ، ص م = ١٨سم ، س ص = ٢٠ سم
ن ل = ... ، ن ص = ...
محيط △ ن ل ص = ...

حقيقة

$\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في △ أ ب جـ ، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$.
إذا كان: أ م = ٢ م ء
فإن: م تكون نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ .



مثال (١)



فى الشكل المقابل:

أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م،

هـ ∈ $\overline{ء م}$ حيث ء هـ = ٢ هـ م،

رسم $\overleftarrow{جـ هـ}$ فقطع $\overline{أ ء}$ فى و.

أثبت أن: أ و = و ء

البرهان: فى ▱ أ ب جـ ء

∵ $\overline{أ جـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م} ∴ م منتصف $\overline{أ جـ}$

فى △ ء أ جـ

∵ م منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{ء م}$ متوسط للمثلث

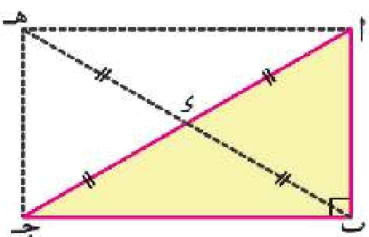
∵ هـ ∈ $\overline{ء م}$ ، ء هـ = ٢ هـ م

∴ هـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∵ هـ ∈ $\overline{جـ و}$ ∴ $\overline{جـ و}$ متوسط للمثلث ، و منتصف $\overline{أ ء}$

نظرية (٣)

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات: أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٩٠°

$\overline{ب ء}$ متوسط فى △ أ ب جـ

المطلوب: إثبات أن: ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

العمل: نرسم $\overleftarrow{ب ء}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{ب ء}$ بحيث ب ء = ء هـ

البرهان:

∵ الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازى أضلاع

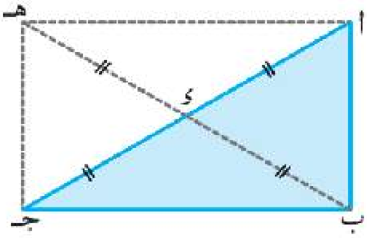
∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ جـ

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ **وهو المطلوب**

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{ب ى}}$ متوسط ، ى أ = ى ب = ى جـ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب ى}}$ بحيث ب ى = ى هـ

البرهان:

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ب هـ = أ جـ

∵ الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متساويان فى الطول و ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° **وهو المطلوب**

نتيجة

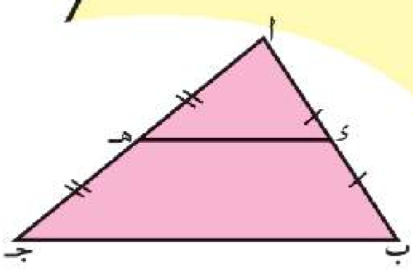
طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر

تذكر أن

فى المثلث أ ب جـ إذا كانت ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ فإن

١ ى هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

٢ $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



المثلث المتساوى الساقين

فكّر وناقِش

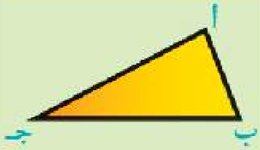
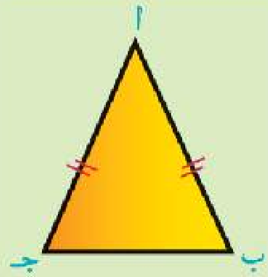
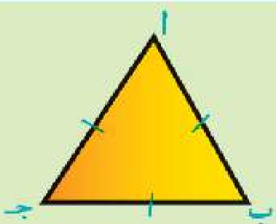
سوف تتعلم

- خـواصَّ المثلثِ المتساوى الساقين.
- تصنيفاتُ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- مثلث متساوى الأضلاع.
- مثلث مختلف الأضلاع.

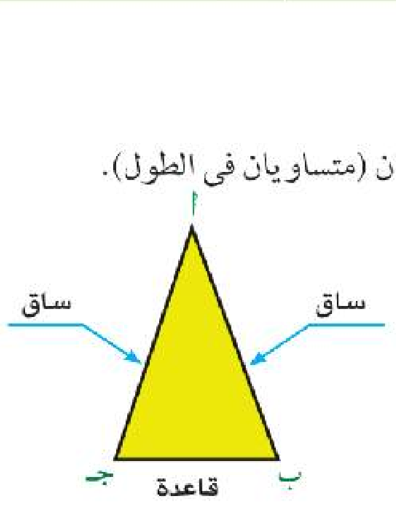
علمت أن المثلثاتِ تصنَّف حسب أطوالِ أضلاعها إلى ثلاثة أنواع:

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)
 أ ب ≠ ب جـ أ ب ≠ أ جـ ب جـ ≠ أ جـ	 أ ب = أ جـ	 أ ب = أ جـ = ب جـ

فى الشّكل المقابل:

لاحظ أن: الضلعين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ متطابقان (متساويان فى الطول).

لذلك يسمى المثلث أ ب جـ بالمثلث المتساوى الساقين وتسمى النقطة أ رأس المثلث، $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدته والزاويتان ب، جـ زاويتا قاعدة المثلث



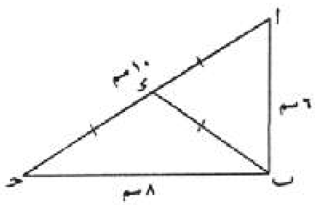
خواصُّ المثلَّثِ المتساوى الساقين

فى أىِّ مثلثٍ متساوى الساقين:

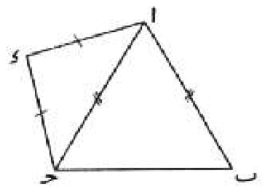
- مانوع كل من زاويتى القاعدة؟ (حادة - قائمة - منفرجة)
- مانوع زاوية الرأس؟

مثال

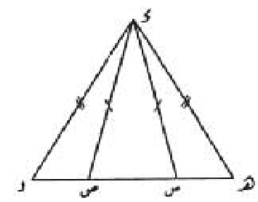
فى كل من الأشكال الآتية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتى القاعدة وزاوية رأس المثلث .



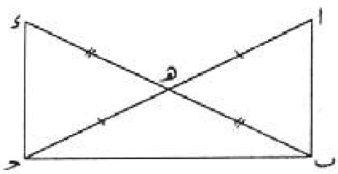
(شكل ١)



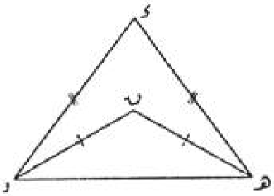
(شكل ٢)



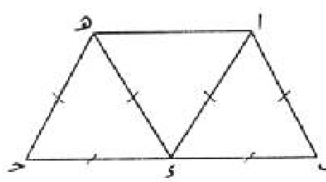
(شكل ٣)



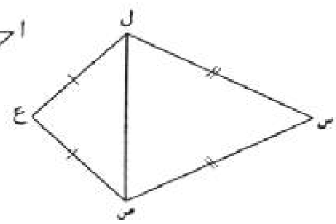
(شكل ٤)



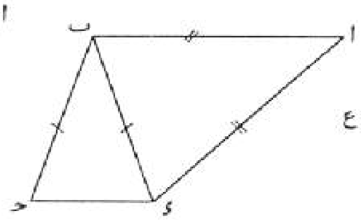
(شكل ٥)



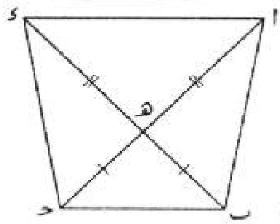
(شكل ٦)



(شكل ٧)



(شكل ٨)



(شكل ٩)

ناقِشْ مع معلمك فى الحل

الوحدة الرابعة
الدرس الثالث

نظرياتُ المثلَّثِ المتساوى السّاقين

فكّر وناقِش

سوف تتعلّم

- العَلاقة بين زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين.
- العلاقة بين قياسات زوايا المثلَّث المتساوى الأضلاع.
- العلاقة بين الضّلعين المقابلين لزاويتين متساويتين فى مثلث.
- إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

المصطلحات الأساسية

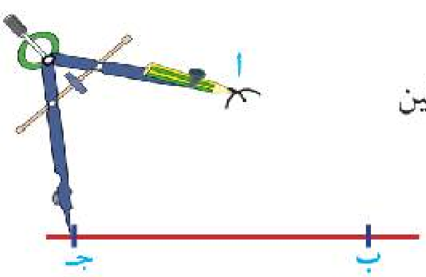
- مثلث متساوى الساقين.
- زاويتا القاعدة.

هل توجد عَلاقةٌ بين قياسِ زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين؟

للتعرُّف على ذلك قم بالنشاط التالى:

نشاط

باستخدام الفرجار



١ ارسم عدة مثلثاتٍ متساوية الساقين كما يوضّح ذلك الرسم المقابل حيث أ ب = أ جـ .

٢ **أوجد** باستخدام المنقلة قياس كل من زاويتى القاعدة ∠ أ ب جـ، ∠ أ جـ ب .

٣ سجّل البيانات التى حصلت عليها فى جدول كالآتى، وقارن بين القياسات فى كلِّ حالة.

رقم المثلث	ق (∠ أ ب جـ)	ق (∠ أ جـ ب)
١		
٢		
٣		

٤ احفظ نشاطَك فى ملف الإنجاز

نظرية (١)

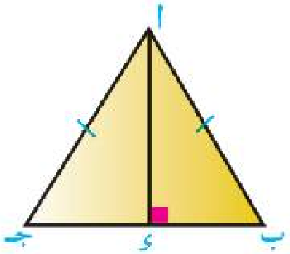
زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

المعطيات : أ ب جـ مثلث فيه $\overline{أ ب} \equiv \overline{أ جـ}$

المطلوب : إثبات ان ∠ ب ≡ ∠ جـ

العمل : نرسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

البرهان : المثلثان أ ء ب، أ ء جـ قائما الزاوية فيهما



$\overline{أ ب} \equiv \overline{أ جـ}$ (معطى)

$\overline{أ ء}$ (ضلع مشترك)

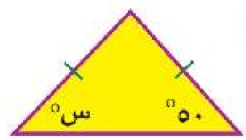
$\therefore \triangle$ أ ء ب $\equiv \triangle$ أ ء جـ (وتر و ضلع)

و ينتج من التَّطابق أن $\angle$ ب $\equiv \angle$ جـ وهو المطلوب

تدرب

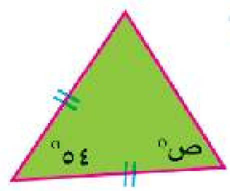
١ فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمَة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية:

أ



س = ...

ب

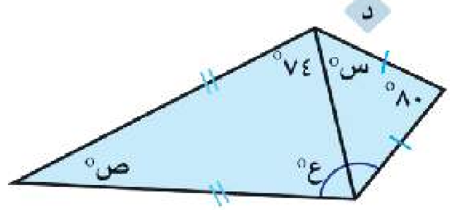


ص = ...

جـ

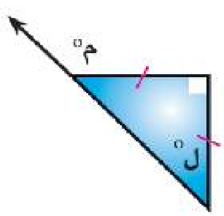
ن = ... هـ = ...

د



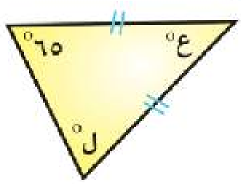
س = ... ، ص = ... ، ع = ...

هـ



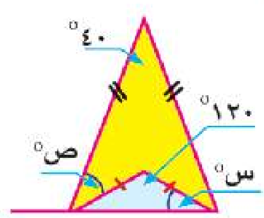
ل = ... ، م = ...

و



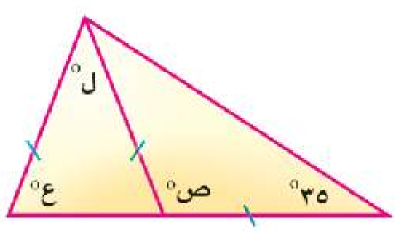
ل = ... ، ع = ...

ز



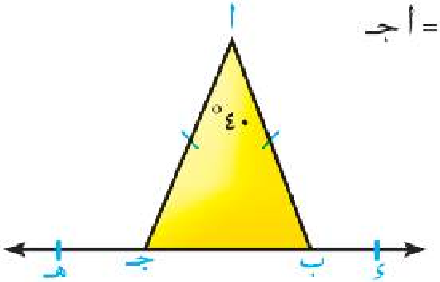
س = ... ، ص = ...

ح



ص = ... ، ل = ... ، ع = ...

٣ في الشكلِ المقابل أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ



ق (∠ أ) = ٤٠°، ى ∈ جـ ب، هـ ∈ ب جـ

أولاً: أوجد ق (∠ أ ب جـ)

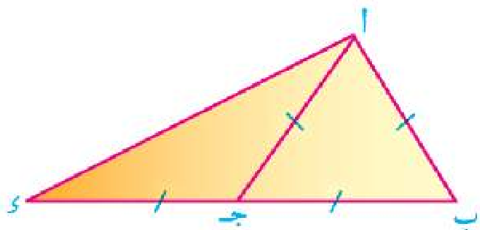
ثانيًا: اثبت أن ∠ أ ب ى ≡ ∠ أ جـ هـ

فكّر هل مكملاتُ الزوايا المتساوية في القياسِ تكون متساويةَ القياس؟

نتيجة

إذا كان المثلثُ متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياسُ كلٍّ منها ٦٠°

مثال (١)



في الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع.

ى ∈ ب جـ بحيث ب جـ = جـ ى .

اثبت أن ب أ ⊥ أ ى

المعطيات : أ ب = ب جـ = جـ أ = جـ ى ، ى ∈ ب جـ

المطلوب : إثبات أن: ب أ ⊥ أ ى

البرهان : ∵ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع .

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب) = ٦٠° نتيجة

∵ ى ∈ ب جـ ∴ ∠ ب جـ أ خارجة عن △ أ جـ ى

ق (∠ ب جـ أ) = ق (∠ جـ أ ى) + ق (∠ جـ ى أ) = ٦٠° (١)

في △ أ جـ ى

∵ جـ أ = جـ ى ∴ ق (∠ جـ أ ى) = ق (∠ جـ ى أ) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ق (∠ جـ أ ى) = ق (∠ جـ ى أ) = ٣٠°

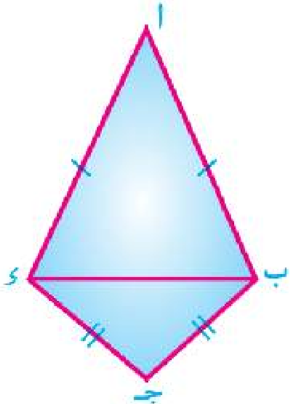
∵ ق (∠ ب أ ى) = ق (∠ ب أ جـ) + ق (∠ جـ أ ى)

∴ ق (∠ ب أ ى) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{أ ى}}$ وهو المطلوب

لاحظ أن: قياسُ أي زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

مثال



٢ في الشكل المقابل: أ ب = أ ى، ب جـ = جـ ى

اثبت أن ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ى جـ

المعطيات: أ ب = أ ى، ب جـ = جـ ى

المطلوب: إثبات أن ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ى جـ

البرهان: في △ أ ب ى

∵ أ ب = أ ى

∴ ق (∠ أ ب ى) = ق(∠ أ ى ب) (١)

في △ جـ ب ى

∵ جـ ب = جـ ى

∴ ق (∠ جـ ب ى) = ق(∠ جـ ى ب) (٢)

بجمع (١)، (٢) ينتج أن:

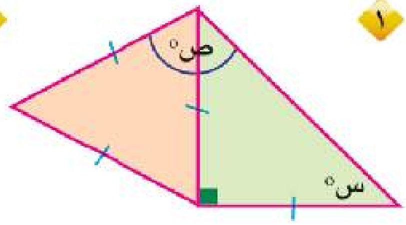
ق (∠ أ ب ى) + ق(∠ جـ ب ى) = ق (∠ أ ى ب) + ق(∠ جـ ى ب)

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ى جـ)

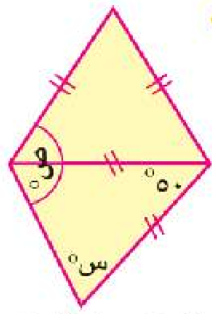
∴ ∠ أ ب جـ ≡ ∠ أ ى جـ وهو المطلوب.

تدرب

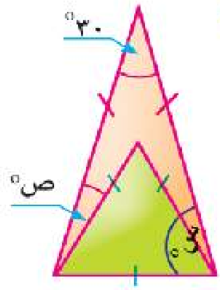
فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمةَ الرمز المستخدم لقياس الزاوية:

١


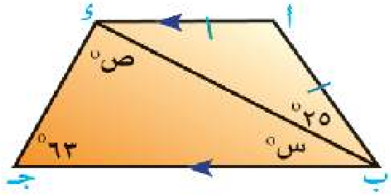
س = ... ، ص = ...

٢


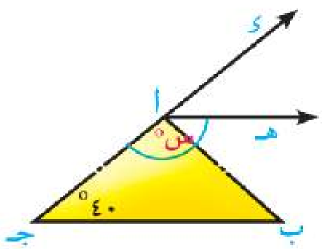
س = ... ، ص = ...

٣


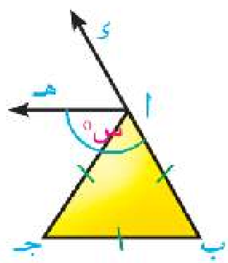
س = ... ، ص = ...

٤ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$


س = ... ، ص = ...

٥ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$


س = ...

٦ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ منصف ∠ جـ أ ء


س = ...

نشاط ارسم المثلث أ ب جـ فيه ب جـ = ٧ سم، ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٥٠° ثم قس طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، كرر النشاط باختيار قياسات أخرى لطول $\overline{\text{ب جـ}}$ وقياس زاويتى ب، جـ و أكمل الجدول:

رقم المثلث	ب جـ	ق (∠ ب)	ق (∠ جـ)	أ ب	أ جـ
١	٧سم	٥٠°	٥٠°	....	....
٢	....	....	....	....	....
٣	....	....	....	....	....
٤	....	....	....	....	....

١ هل طول $\overline{\text{أ ب}}$ = طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟ ٢ هل $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟

٣ كيف يمكنك تفسيرُ هذه النتائج هندسيًّا؟

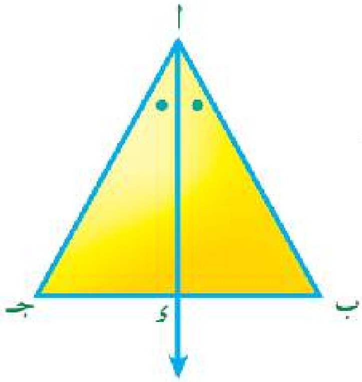
نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلثٍ فإن الضلعينِ المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوى الساقين.

المعطيات : △ أ ب جـ فيه ∠ ب ≡ ∠ جـ

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$

العمل : ننصف ∠ ب أ جـ بالمنصف $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى



البرهان : ∵ ∠ ب ≡ ∠ جـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

∵ $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ ب أ ى) = ق (∠ جـ أ ى)

∵ مجموعُ قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ أ ى جـ)

∴ المثلثان أ ى ب ، أ ى جـ فيهما

$\overline{\text{أ ى}}$ ضلع مشترك
ق (∠ ب أ ى) = ق (∠ جـ أ ى)
ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ أ ى جـ)

∴ △ أ ى ب ≡ △ أ ى جـ

وينتج من التطابق أن $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{أ جـ}}$

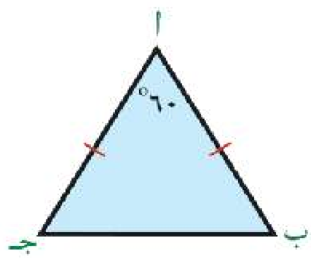
ويكون △ أ ب جـ متساوى الساقين.

نتيجة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

فى الشّكل المقابل أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه:

أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°



أكمل ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) = ...

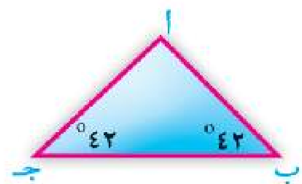
أى أن: ∠ ...... ≡ ∠ .... ≡ ....

∴ △ أ ب جـ هو مثلث ....

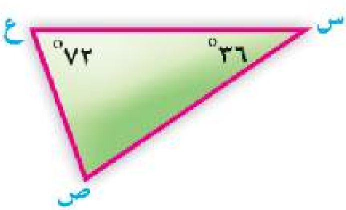
لاحظ أن: المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع.

تدرب

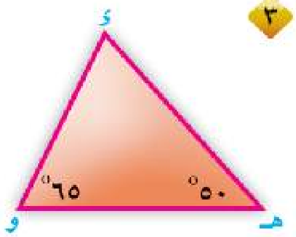
في كلٍّ من الأشكال الآتيةِ اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول كما في المثال ١ :

١


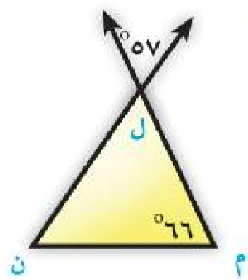
أ ب = أ جـ

٢


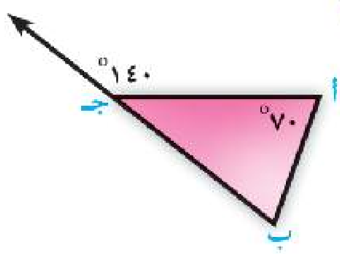
.... = ...

٣


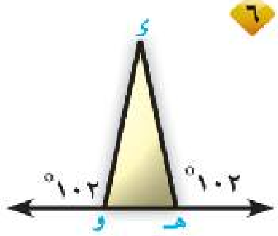
.... = ...

٤


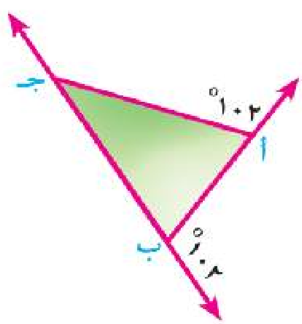
.... = ...

٥


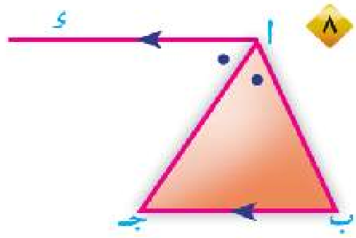
.... = ...

٦


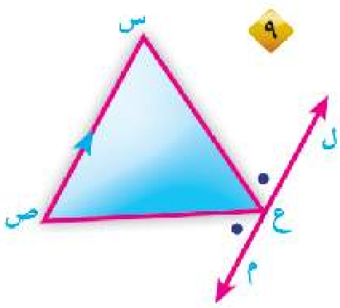
.... = ...

٧


.... = ...

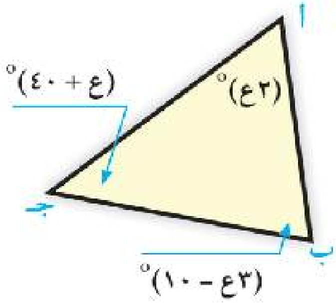
٨


.... = ...

٩


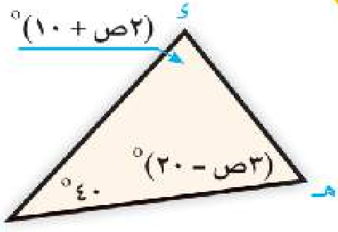
.... = ...

١٠



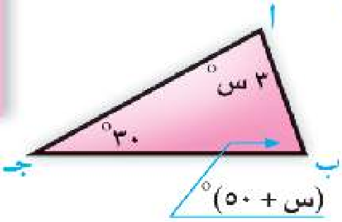
.... = ...

١١



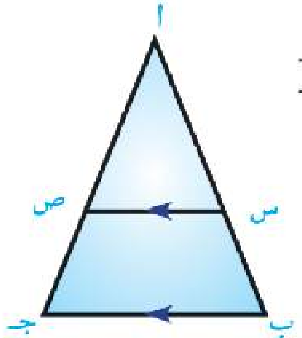
.... = ...

١٢



.... = ...

أمثلة



١ فى الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن △ أ س ص متساوى الساقين.

المعطيات : أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب : **إثبات أن** أ س = أ ص

البرهان : فى △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) (١)

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ب جـ) **بالتناظر** (٢)

بالمثل ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ أ جـ ب) **بالتناظر** (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

فى △ أ س ص

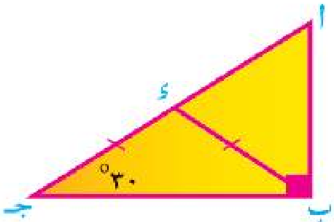
∵ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

∴ أ س = أ ص

أى أن المثلث أ س ص متساوى الساقين **وهو المطلوب**

فكّر **هل يمكنُ استنتاجُ أن س ب = ص جـ؟ فسر إجابتك.**

٢ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ق (∠ جـ) = ٣٠°،

ء ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث ء ب = ء جـ

اثبت أن △ أ ب ء متساوي الأضلاع.

المعطيات: ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ جـ) = ٣٠°، ء ب = ء جـ

المطلوب: إثبات أن أ ب = ب ء = أ ء

البرهان: في △ ء ب جـ ∵ ء ب = ء جـ

∴ ق (∠ ء ب جـ) = ق (∠ جـ) = ٣٠°

في △ أ ب جـ ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ ء ب جـ) = ٣٠°

∴ ق (∠ ب أ ء) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠° (١)

∵ ∠ أ ء ب خارجة عن △ ب ء جـ

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ ء ب جـ) + ق (∠ ء جـ ب)

ق (∠ أ ء ب) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠° (٢)

في △ أ ب ء ∵ مجموع قياسات زوايا △ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ب ء) = ١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠° (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ)

أي أن ∠ أ ب ء ≡ ∠ أ ء ب ≡ ∠ أ

∴ المثلث أ ب ء متساوي الأضلاع **أي أن** أ ب = ب ء = أ ء.

الوحدة الرابعة

الدرس الرابع

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

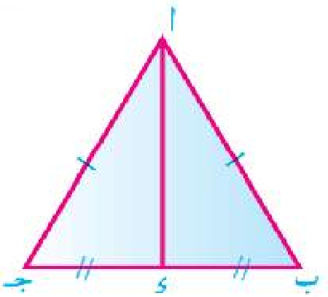
- نتائجُ على نظرياتِ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- منصف زاوية الرأس.
- منصف قاعدة المثلث.
- محور تماثل القطعة المستقيمة.

نتيجة (١)

متوسّطُ المثلثِ المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة



فى الشّكل المقابل

$\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ

، $\overline{\text{أ ى}}$ متوسط فيه

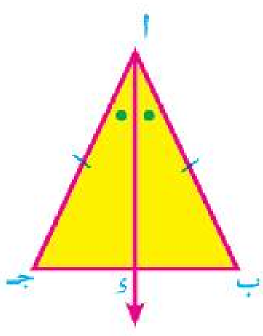
فإن: $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ

، $\overline{\text{أ ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن: $\triangle$ أ ى ب $\equiv$ $\triangle$ أ ى جـ لماذا؟

نتيجة (٢)

منصفُ زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصفُ القاعدة ويكونُ عموديًا عليها.



فى الشكل المقابل:

$\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ،

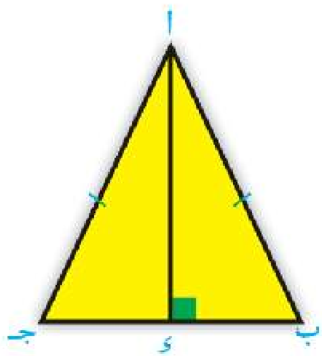
$\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ

فإن ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن $\triangle$ أ ى ب $\equiv$ $\triangle$ أ ى جـ لماذا؟

نتيجة (٣)

المستقيمُ المرسومُ من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على القاعدةِ ينصف كلاً من القاعدة وزاويةالرأس.



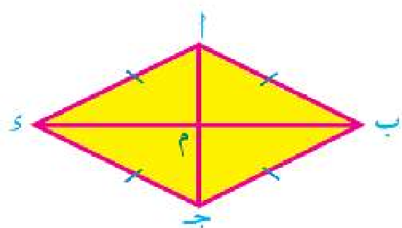
فى الشَّكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

فإن ء تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ أ ء)

لاحظ أن △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ لماذا؟

فكِّر



فى الشَّكل المقابل:

أ ب جـ ء شكل رباعى جميع أضلاعه متساوية فى الطول.

هذا الشكل يسمى معين ، قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

يتقاطعان فى نقطة م.

لاحظ أن: △ أ ب ء ≡ △ جـ ب ء لماذا؟

∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ جـ ب ء)

فى △ أ ب جـ ، أ ب = ب جـ ، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب م}}$ ⊥ .... ، م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

في △ ب أ ء ، أ ب = أ ء ، $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ .... ، م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

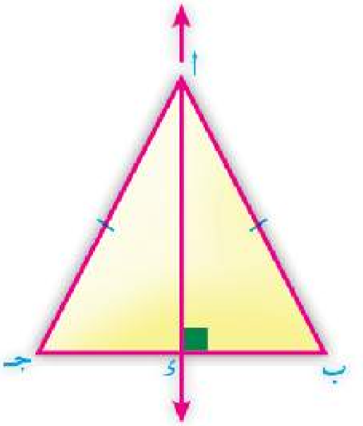
هل قطرا المعين متعامدان؟

هل قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؟

هل قطر المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما؟ سجِّل إجابتك .

محاورُ التّماثل

أولاً: محورُ التماثلِ للمثلثِ المتساوى الساقين



محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيمُ المرسوم من رأسه عموديًا على قاعدته.

فى الشكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ، $\overline{\text{أ ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ هو محور تماثل للمثلث أ ب جـ المتساوى الساقين.

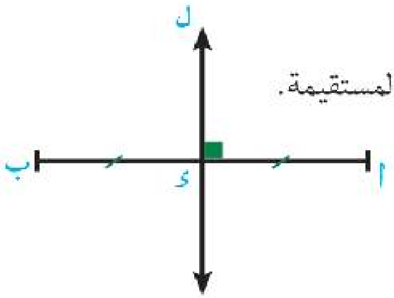
ناقش:

هل يوجدُ للمثلثِ المتساوى الساقين أكثرُ من محور تماثل؟

كم عددُ محاورِ التماثل فى المثلث المتساوى الأضلاع؟

هل توجد للمثلثِ المختلفِ الأضلاع محاورُ تماثل؟

ثانيًا: محور تماثل القطعة المستقيمة:



يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة.

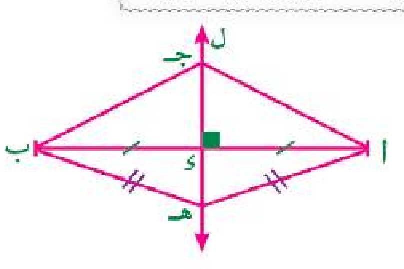
فى الشَّكل المقابل:

إذا كانت ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، المستقيم ل $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ى $\in$ ل

فإن المستقيم ل هو محور $\overline{\text{أ ب}}$

خاصيّة هامة

أىُّ نقطةٍ على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.

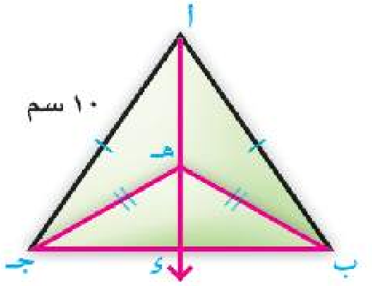


لاحظ أن:

1. إذا كانت جـ $\in$ ل فإن أ جـ = ب جـ
2. إذا كان هـ أ = هـ ب فإن هـ $\in$ ل لماذا؟

مثال

١ في الشَّكل المقابل



أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ جـ

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = {ى}

فإذا كان ب جـ = ٦سم، أوجد طول كل من $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$

المعطيات : أ ب = أ جـ، هـ ب = هـ جـ

المطلوب : إيجاد جـ ى ، أ ى

البرهان : ∵ أ ب = أ جـ ∴ أ تقع على محور $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ هـ ب = هـ جـ ∴ هـ تقع على محور $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ هو محور $\overline{\text{ب جـ}}$

ويكون ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ب جـ = ٦سم ∴ جـ ى = ٣سم

∵ $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

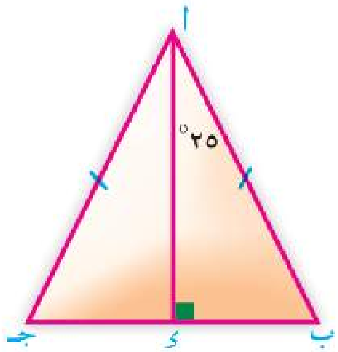
∴ فى △ أ ى جـ القائم الزاوية فى ى

$(\text{أ ى})^٢ = (\text{أ جـ})^٢ - (\text{جـ ى})^٢$

$(\text{أ ى})^٢ = ١٠٠ - ٩$

∴ أ ى = $\sqrt{٩١}$ سم

٢ في الشَّكل المقابل



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ،

$\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ ب أ ى) = ٢٥°،

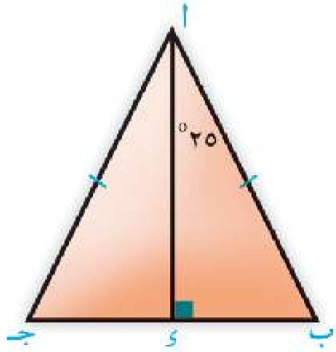
ب جـ = ٤سم أوجد

أ ق (∠ ى أ جـ) ب طول $\overline{\text{ى جـ}}$

الحل

المعطيات: أ ب = أ جـ، $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ ى) = ٢٥°، ب جـ = ٤سم

المطلوب: ق (∠ ى أ جـ)، طول $\overline{\text{ى جـ}}$.



البرهان : فى △ أ ب جـ

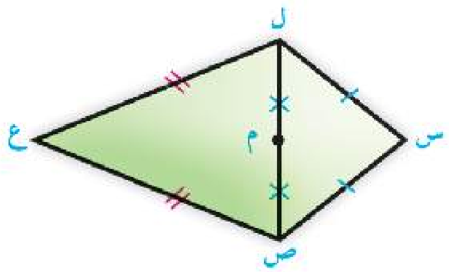
∵ أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ء أ ب) = ٢٥°،

ء جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢سم.

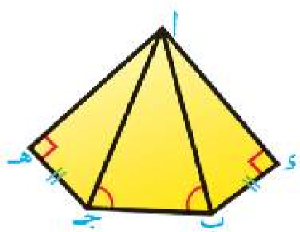
تدرب



١ فى الشَّكل المقابل

س ص = س ل ، ع ص = ع ل ، ل م = ص م

أثبت أن س ، م ، ع على استقامة واحدة.



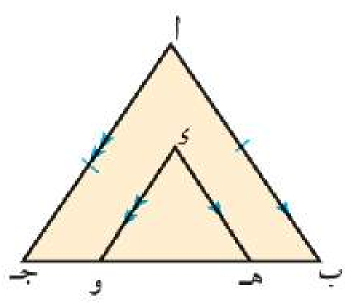
٢ فى الشكل المقابل:

ب ء = جـ هـ

ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

برهن أن: ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ جـ أ هـ)



٣ فى الشَّكل المقابل:

أ ب = أ جـ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

$\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

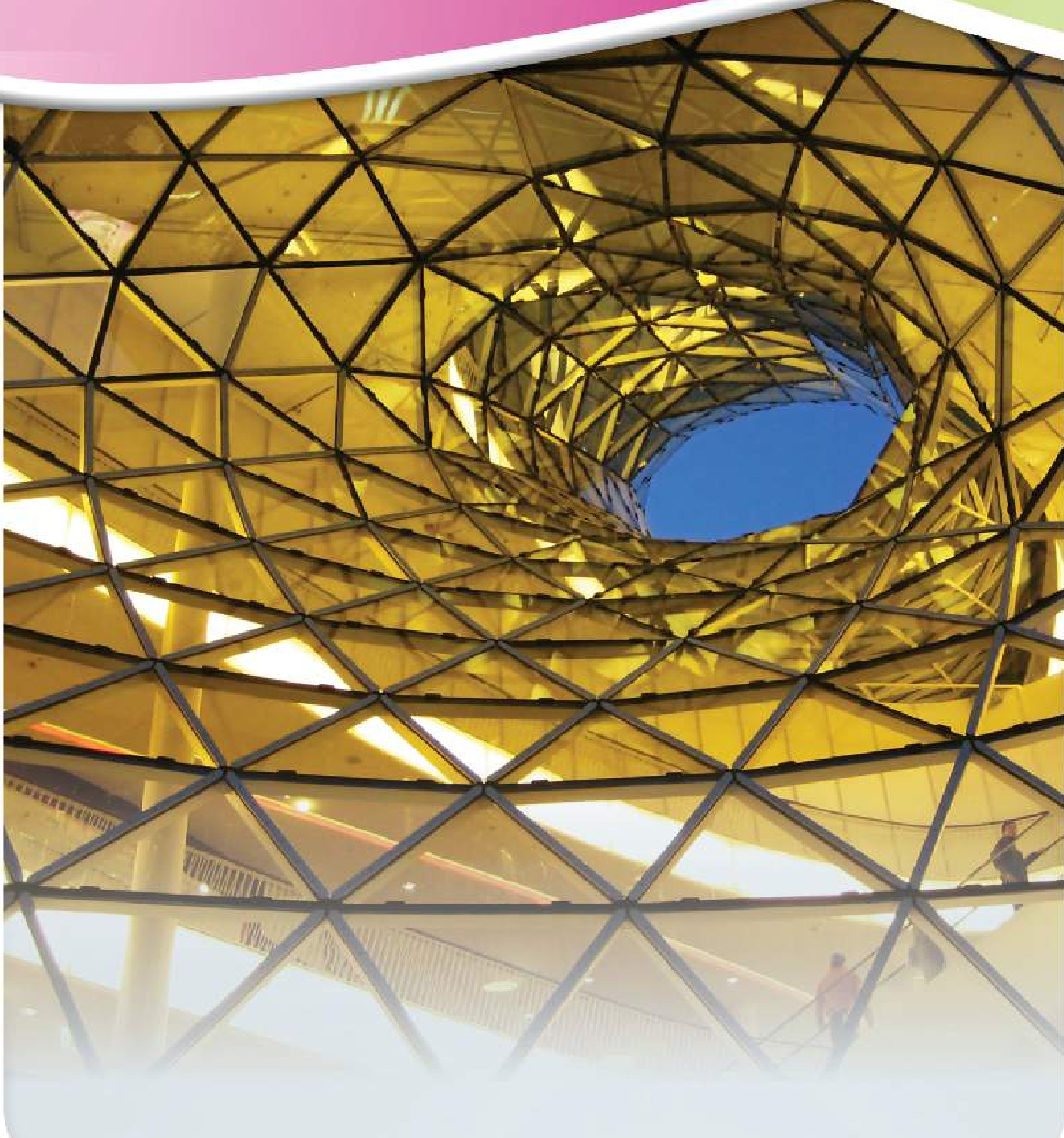
اثبت: أولًا: ء هـ = ء و

ثانيًا: ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ هـ ء و)

الوحدة الخامسة

٥

التباين



الوحدة الخامسة

الدرس الأول

التباين

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- مفهوم التباين.
- مسلماتّ التباين.

المصطلحات الأساسية

- تباين
- مسلمة
- أكبر من >
- أصغر من <
- يساوى =

مفهومُ التَّباين

❶ هل جميعُ تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟

❷ هل هناك اختلافٌ بين قياسِ الزاوية الحادَّة والزاوية القائمة والزاوية المنفرجة؟

ماذا يعنى هذا الاختلاف؟

لاحظ أن:

التباين يعنى وجودَ اختلافٍ فى أطوال التلاميذ، وفى قياسات الزوايا، ويعبَّر عنه بعَلاقة التباين ، والتى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين.

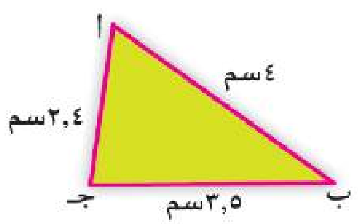
أمثلة

❶ **إذا كانت:** ∠ أ ب جـ حادة **فإن:** ق (∠ أ ب جـ) < ٩٠°.

❷ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث فيه

أ ب = ٤سم، ب جـ = ٣,٥ سم،

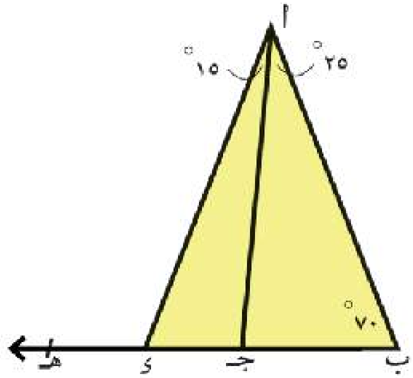
أ جـ = ٢,٤ سم



فإن: أ ب > ب جـ ، ب جـ > أ جـ

أى أن أ ب > ب جـ > أ جـ

تدرب



فى الشكل المقابل أوجد: ق(∠ أ جـ ب) ، ق(∠ أ جـ ء)،

ق(∠ أ ء هـ) ثم أكمل باستخدام > أو <:

ق(∠ أ ء هـ) .... ق(∠ جـ أ ء)

ق(∠ أ ء جـ) .... ق(∠ أ جـ ب)

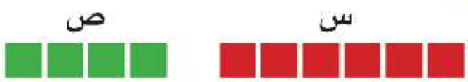
ق(∠ أ جـ ء) .... ق(∠ أ ب جـ)

ق(∠ أ جـ ء) .... ق(∠ أ ء هـ)

لاحظ أن: جميعُ العلاقاتِ السابقة تسمى متباينات.

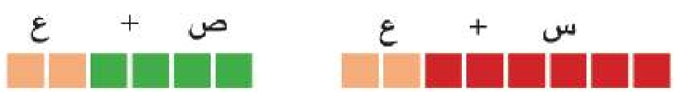
مسلماتُ التباين

لأىِّ ثلاثة أعداد س ، ص، ع:



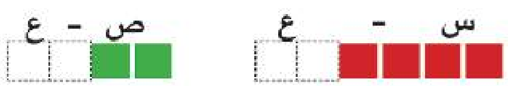
١ إذا كان: س > ص

فإن: س + ع > ص + ع



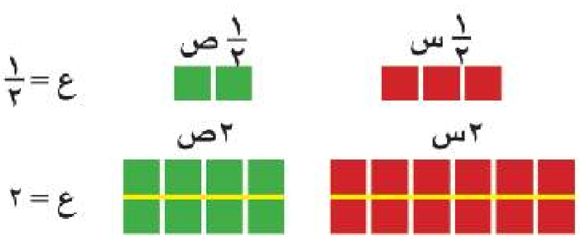
٢ إذا كان: س > ص

فإن: س - ع > ص - ع



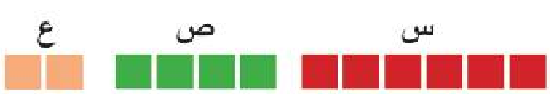
٣ إذا كان: س > ص ، ع عددًا موجبًا

فإن: س ع > ص ع



٤ إذا كان: س > ص ، ص > ع

فإن: س > ع

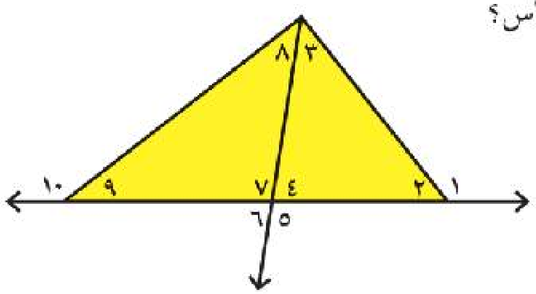


٥ إذا كان: س > ص ، أ > ب

فإن: س + أ > ص + ب

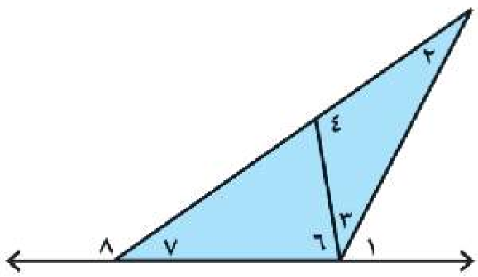
تذكر أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلثِ أكبر من قياس أىِّ زاويةٍ داخلة ماعدا المجاورة لها.

تدرب



١ فى الشكل المقابل: أى من الزوايا التالية لها أكبر قياس؟

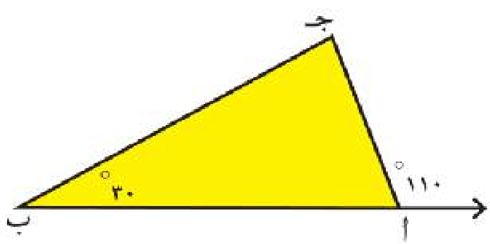
- **أ** ∠١ ، ∠٣ ، ∠٤
- **ب** ∠٤ ، ∠٨ ، ∠٩
- **جـ** ∠٢ ، ∠٣ ، ∠٧
- **د** ∠٧ ، ∠٨ ، ∠١٠

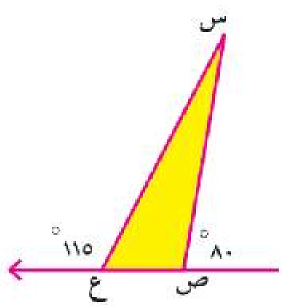


٢ فى الشكل المقابل عين:

- **أ** جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠١)
- **ب** جميع الزوايا التى قياسها أكبر من ق (∠٦)
- **جـ** جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠٤)

٣ رتِّب قياساتِ زوايا المثلث أ ب جـ تصاعديًّا، قياسات زوايا المثلث س ص ع تنازليًّا.

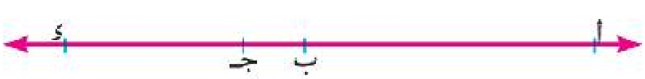




ق (∠ ....) < ق (∠ ....) < ق (∠ ....)

ق (∠ ....) > ق (∠ ....) > ق (∠ ....)

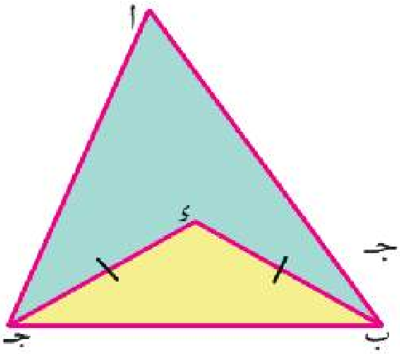
٤ فى الشَّكل المقابل: جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$



فإذا كان: أ ب > جـ ء

فإن: أ جـ ...... ب ء

مثال



فى الشكل المقابل:

ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ)، ء ب = ء جـ

اثبت أن: ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ أ ب ء)

المعطيات: ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ)، ء ب = ء جـ

المطلوب: إثبات أن: ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ أ ب ء)

البرهان: ∵ ء ب = ء جـ

∴ ق (∠ ء جـ ب) = ق (∠ ء ب جـ) (١)

∵ ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ) (٢)

∴ بطرح (١) من (٢) ينتج أن:

ق (∠ أ جـ ب) - ق (∠ ء جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ) - ق (∠ ء ب جـ)

∴ ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ أ ب ء) **وهو المطلوب**

الوحدة الخامسة

الدرس الثانى

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

فكّر وناقِش

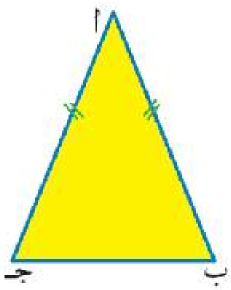
سوف تتعلم

- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.

المصطلحات الأساسية

- زاوية.
- قياس زاوية.
- أكبر زاوية فى مثلث.
- أصغر زاوية فى مثلث.
- أكبر ضلع فى مثلث.
- أصغر ضلع فى مثلث.

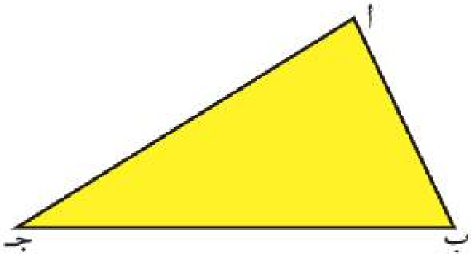
نشاط



١ فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أب = أ جـ

- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ،
ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين ب، جـ المقابلتين للضلعين $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ المتساويين فى الطول؟
- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأسين أ، جـ ، ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين المقابلتين للضلعين $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ المختلفين فى الطول؟
- هل اختلاف طولا ضلعين فى المثلث يؤدى إلى اختلاف قياسا الزاويتين المقابلتين لهما؟

٢ ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع.



- إطوى المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين أ، ب المقابلتين للضلعين $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$ المختلفين فى الطول؟
- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ ماذا تلاحظ ؟
- هل يوجد فى هذا المثلث زوايا متساوية فى القياس؟

لاحظ أن: إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع.

نشاط

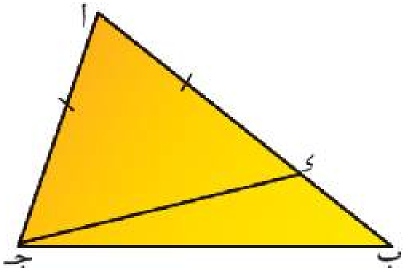
ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع ثم قس أطوال أضلاعه الثلاثة ، وقياسات زواياه المناظرة ثم أكمل الجدول التالى:

أطوال الأضلاع	قياسات الزوايا المقابلة
أ ب = ... سم	ق (∠ جـ) = ... °
ب جـ = ... سم	ق (∠ أ) = ... °
جـ أ = ... سم	ق (∠ ب) = ... °

ماذا تلاحظ؟

نظرية (٣)

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر.



المعطيات: △ أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ

المطلوب: إثبات أن: ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ)

العمل: نأخذ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = أ جـ

البرهان: △ أ جـ ء فيه أ ء = أ جـ

∴ ق (∠ أ جـ ء) = ق (∠ أ ء جـ) (١)

∵ ∠ أ ء جـ خارجة عن △ ب ء جـ

∴ ق (∠ أ ء جـ) > ق (∠ ب) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن

ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ ب)

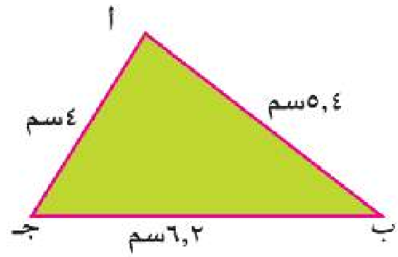
فيكون ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ جـ ء)

∴ ق (∠ أ جـ ب) > ق (∠ أ ب جـ) **وهو المطلوب.**

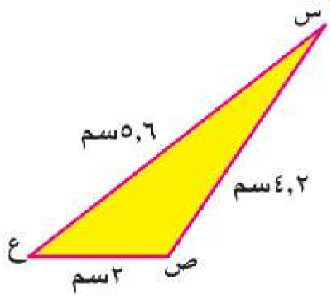
تدرب

في كل من الأشكال التالية اكمل باستخدام (<، >)

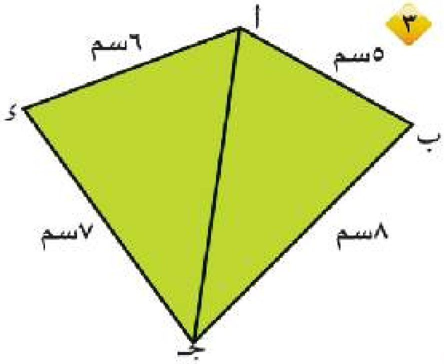
١



٢



٣

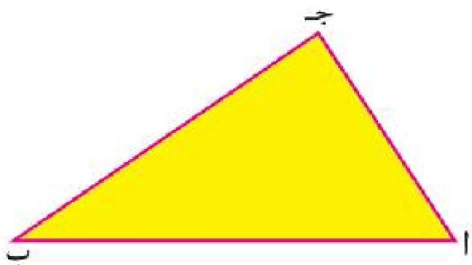


ق (∠ أ) ...... ق (∠ ب)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ب أ جـ) ..... ق (∠ ب جـ أ)
ق (∠ أ) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ س) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ء أ جـ) ..... ق (∠ ء جـ أ)
ق (∠ ب) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ س)	ق (∠ ب أ ء) ..... ق (∠ ب جـ ء)

لاحظ أن: قياس أكبر زاوية في المثلث > ٦٠°

قياس أصغر زاوية في المثلث < ٦٠° **لماذا؟**

مثال



في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه أ ب > ب جـ > جـ أ

برهن أن: ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

المعطيات: أ ب > ب جـ > جـ أ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

البرهان: في △ أ ب جـ

∵ أ ب > ب جـ ∴ ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) (١)

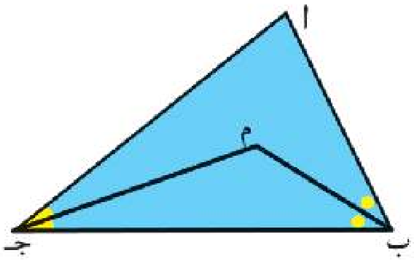
∵ ب جـ > جـ أ ∴ ق (∠ أ) > ق (∠ ب) (٢)

من (١)، (٢) وباستخدام مسلمات التباين ينتج أن:

ق (∠ جـ) > ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

تذكر أن: أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زوايا المثلث فى القياس
وأصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زوايا المثلث فى القياس.

مثال



فى الشَّكل المقابل:

ا ب جـ مثلث، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ا ب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ ا جـ ب

فإذا كان: م جـ > م ب

برهن أن: ق (∠ ا ب جـ) > ق (∠ ا جـ ب)

المعطيات: $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ا ب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ ا جـ ب

، م جـ > م ب.

المطلوب: إثبات أن ق (∠ ا ب جـ) > ق (∠ ا جـ ب)

البرهان: فى △ م ب جـ

∵ م جـ > م ب ∴ ق (∠ م ب جـ) > ق (∠ م جـ ب) **(١)**

فى △ ا ب جـ

∵ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ا ب جـ ∴ ق (∠ م ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا ب جـ) **(٢)**

∵ $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ ا جـ ب ∴ ق (∠ م جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا جـ ب) **(٣)**

∴ من **(١)، (٢)، (٣):** $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا ب جـ) > $\frac{1}{2}$ ق (∠ ا جـ ب) **من مسلمات التباين**

∴ ق (∠ ا ب جـ) > ق (∠ ا جـ ب) **وهو المطلوب**

الوحدة الخامسة

الدرس الثالث

المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

فكر وناقش

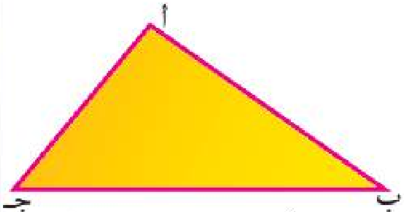
سوف تتعلم

- المقارنة بين أطوال الأضلاع فى مثلث.

المصطلحات الأساسية

- أطول ضلع فى مثلث.
- أصغر ضلع فى مثلث.
- أكبر زاوية فى مثلث.
- أصغر زاوية فى مثلث.
- قطعة مستقيمة عمودية.

نشاط ١ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث زواياه مختلفة فى القياس.



- اطو المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب. ماذا تلاحظ على طولى الضِّلعين $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ المقابلين للزاويتين أ، ب المختلفتين فى القياس؟
- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ، ماذا تلاحظ ؟
- عندما ينطبق الرأس جـ علي الرأس أ، ماذا تلاحظ ؟
- هل يوجد في هذا المثلث أضلاع متساوية في الطول؟

لاحظ أن: إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال أضلاعه المقابلة لهذه الزوايا.

نشاط ٢ ارسم المثلث أ ب جـ بحيث تكون زواياه مختلفة فى القياس، ثم قس أطوال الأضلاع المقابلة وأكمل الجدول الآتى:

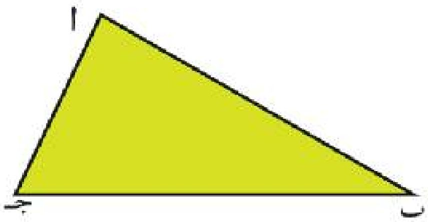
قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع المقابلة له
ق(∠ أ) = ...°	ب جـ = ... سم
ق(∠ ب) = ...°	جـ أ = ... سم
ق(∠ جـ) = ...°	أ ب = ... سم

ماذا تلاحظ؟

- هل أكبر زاوية فى القياس يقابلها أكبرُ ضلع فى الطول؟ وأصغر زاوية فى القياس يقابلها أصغر ضلع فى الطول؟
- هل يمكن ترتيبُ أطوالِ أضلاع المثلث تصاعديًّا أو تنازليًّا تبعًا لقياسات الزوايا المقابلة لها؟

نظرية (٤)

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياسِ يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى .



المعطيات: △ أ ب جـ فيه ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

المطلوب: إثبات أن: أ ب > أ جـ

البرهان: ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطع مستقيمة

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(١) أ ب < أ جـ (٢) أ ب = أ جـ (٣) أ ب > أ جـ

إذا لم تكن أ ب > أ جـ

فإما أ ب = أ جـ أو أ ب < أ جـ

إذا كان أ ب = أ جـ فإن ق (∠ جـ) = ق (∠ ب)

وهذا يخالف المعطيات حيث إن ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

و إذا كان أ ب < أ جـ فإن ق (∠ جـ) < ق (∠ ب) حسب النظرية السابقة

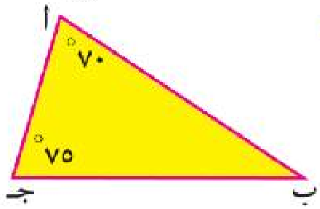
وهذا يخالف المعطيات حيث أن ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

∴ يجب أن يكون أ ب > أ جـ وهو المطلوب

تدرب

في الأشكال التالية أكمل باستخدام > أو < أو =

١

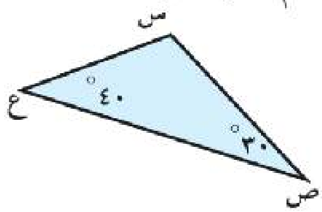


أب ...... أ جـ

أب ...... ب جـ

أجـ ...... ب جـ

٢

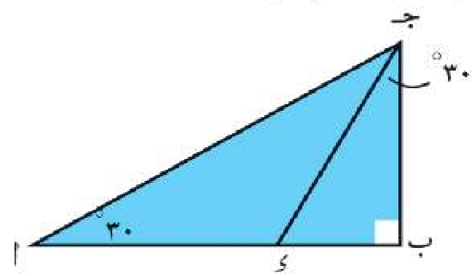


س ص ...... س ع

ص ع ...... س ص

ص ع ...... س ع

٣



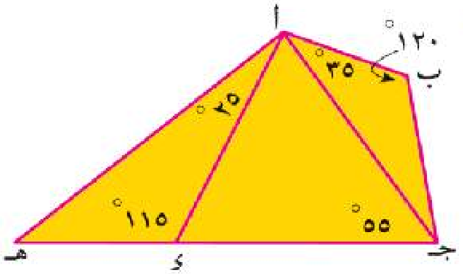
أجـ .... ب جـ

ب جـ .... ى ب

أجـ .... ب ى

جـ ى .... أجـ

٤



ب جـ .... أب

جـ ى .... جـ أ

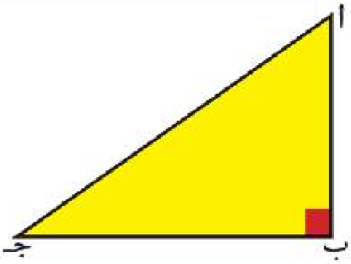
أ ى .... أهـ

جـ ى .... أى

نتائج

نتيجة (١)

في المثلثِ القائم الزاويةِ يكون الوترُ هو أطول أضلاع المثلث.



في الشكل المقابل: △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب.

∵ ∠ أ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ أ)

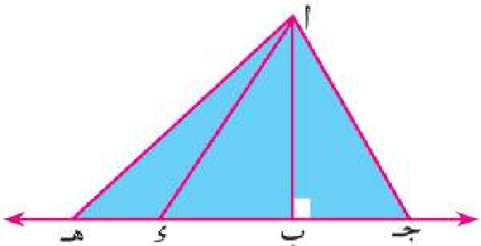
فيكون أ جـ > ب جـ

∵ ∠ جـ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ جـ)

فيكون أ جـ > أ ب

لاحظ أن في المثلثِ المنفرجِ الزاوية الضّلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولًا.

هيّا نفكر



أ جـ > أ ب لماذا؟

أ ء > أ ب لماذا؟

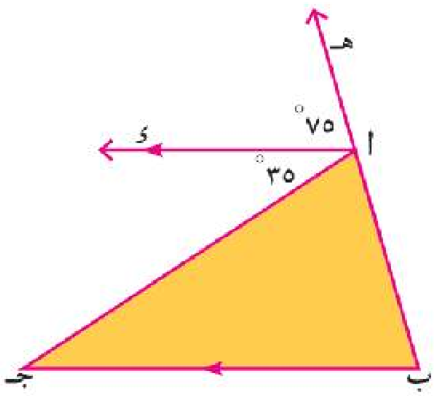
أ هـ > أ ب لماذا؟

هل طول ضلع القائمة في المثلث القائم الزاوية أصغر من طول الوتر . لماذا؟

نتيجة (٢)

طولُ القطعةِ المستقيمة العموديّة المرسومة من نقطةٍ خارجَ مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.

تعريف: بُعدُ أى نقطةٍ عن مستقيمٍ معلوم هو طولُ القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.



مثال

فى الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

$\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ جـ أ ى) = ٣٥°

ق (∠ ى أ هـ) = ٧٥°

برهن أن: أ جـ > أ ب

المعطيات: $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ هـ أ ى) = ٧٥°، ق (∠ ى أ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إثبات أن أ جـ > أ ب

البرهان: ∵ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ أ ى) = ٧٥°   **بالتناظر (١)**

∵ $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ ى أ جـ) = ٣٥°   **بالتبادل (٢)**

من (١) ، (٢) يكون:

فى المثلث أ ب جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ٧٥° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٥°

أى أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)

∴ أ جـ > أ ب   **وهو المطلوب**

الوحدة الخامسة

الدرس الرابع

متباينة المثلث

فكر وناقش

سوف تتعلم
- متباينة المثلث.

المصطلحات الأساسية
- متباينة.
- متباينة المثلث.

نشاط

باستخدام المسطرة المدرجة والفرجار، حاوِلْ رسم المثلث أ ب جـ حيث:

١ أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، أ جـ = ٦سم

٢ أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٢سم

٣ أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٣سم

٤ أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٥سم

فى أىٍّ من الحالاتِ السابقة أمكنك رسم المثلث، وماذا تستنتج؟

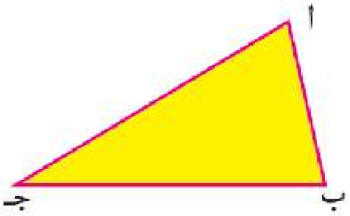
حقيقة: فى أى مثلثٍ يكون مجموعُ طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أى أن: فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

أ ب + ب جـ > أ جـ

ب جـ + جـ أ > أ ب

أ ب + أ جـ > ب جـ



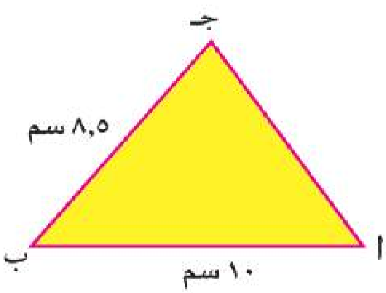
فمثلاً: الأعداد ٥، ٣، ٩ لاتصلح أن تكونَ أطوالَ أضلاع مثلث؛ لأن مجموع أصغر عددين = ٣ + ٥ = ٨ ، ٨ > ٩ ولاتحقق متباينة المثلث.

مثال

فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ ب = ١٠ سم،

ب جـ = ٨,٥ سم

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$.



الحل

أ جـ < أ ب + ب جـ ∴ أ جـ < ١٨,٥ (١)

لكن أ جـ + ب جـ > أ ب متباينة المثلث

أ جـ > أ ب - ب جـ ∴ أ جـ > ١,٥ (٢)

من (١)، (٢) ١,٥ < أ جـ < ١٨,٥

∴ أ جـ ∈]١,٥ ، ١٨,٥[

تدرب

أوجد الفترةَ التى ينتمى إليها طولُ الضلْع الثالث لكلٍّ من المثلثات التالية إذا كان طولا الضِّلعين الآخرين هما:

أ ٦سم، ٩سم ب ٥سم، ١٢سم جـ ٧سم، ١٥سم د ٢,٩ سم، ٣,٢ سم

الحل

أ ∵ متباينة المثلث

تنص على أن: | مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث |

∴ الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =]٣ ، ١٥[

لاحظ : لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ٣ سم (لماذا)

لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ١٥ سم (لماذا)

ناقِشْ معلمك لإستكمال حلول

(ب) . (جـ) . (د)

الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى

تمارين للمراجعة

١ **أكمل** بوضع كل من الأعداد الآتية على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ. ب عددان صحيحان ليس بينهما عوامل مشتركة، ب ≠.

أ ٠,٢ = ... ب ٠,٣ = ... جـ ٢٥٪ = ...

د |- ٠,٧٥| = ... هـ -٦ = ... و $١\frac{١}{٤}$ = ...

٢ **ا ختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين أمام كل عبارة**

أ مجموعة حل المعادلة س + ٥ = |- ٥| فى ط هى ({٠} ، {١٠} ، {-١٠} ، ∅)

ب العدد النسبى المحصور بين $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ هو ($\frac{٢}{١٠}$ ، $\frac{١}{١٠}$ ، ٠,٣ ، -٠,٣)

جـ حاصل ضرب العدد النسبى $\frac{أ}{ب}$ فى معكوسه الجمعى = (صفر ، $-\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{أ^٢}{ب^٢}$ ، $\frac{-أ^٢}{ب^٢}$)

د |- ٢| + |- ٤| + |٦| = (صفر ، |- ١٢| ، -١٢ ، ٦)

هـ $\sqrt{أ^٢}$ = (أ ، - أ ، |أ| ، ± أ)

٣ **أوجد** قيمة س التى تحقق كلا من المعادلات الآتية :

أ ٥ س + ٣ = ٢٠

ب ٧ س + ١١ = ١٢

جـ ٣ س + ٥ = ١

د س + ٣ = ٧

٤ **أوجد** الناتج فى كل ممايأتى فى أبسط صورة:

أ $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = ...

ب الصورة القياسية للعدد ٠,٠٠٠١٥ هى ....

جـ $\sqrt{٠,١٦}$ + |-٠,٦| = ...

د $٢^٠ + ٢^١ + ٢^٢ + ٢^٣$ = ...

هـ مجموع الجذرين التربيعيين للعدد $٢\frac{١}{٤}$ = ...

و $\sqrt{٠,٢٥}$ = ...

الجذر التكعيبى للعدد النسبى
تمارين (١ – ١)

١ أكمل الجدوَل الآتى:

العدد أ	٨	١٢٥	-٢٧	....	$٣\frac{٣}{٨}$	$-\frac{٨}{١٢٥}$	....	....
$\sqrt[٣]{أ}$	....	....	....	-١٠	....	....	٦	-٤

٢ **أكمل**

أ $\sqrt[٣]{-١٢٥} =$ ....
ب $\sqrt[٣]{٣٤٣} =$ ....
جـ $\sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{-٨} =$ ....

د $\sqrt[٣]{٠,٠٠١} =$ ....
هـ $\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{٦٤} =$ ....
و $\sqrt[٣]{أ^٣} =$ ....

٣ **اختر** الإجابةَ الصحيحةَ من بين الإجاباتِ المعطاة أمام كل عبارة:

أ $\sqrt[٣]{(-٨)^٢} =$ .... (٢ أو -٢ أو ٤ أو -٤)

ب $\sqrt{٢٥} - \sqrt[٣]{-١٢٥} =$ .... (١٠ أو ٠ أو ٥ أو ±٥)

جـ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} + \sqrt{٠,٢٥} =$ .... ($\frac{٣}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$ أو ٢ أو -٢)

د $\sqrt[٣]{١٠٠٠} \times \sqrt[٣]{-٠,٠٠٨} =$ .... ($\frac{١}{٢}$ أو ١٠ أو ٢ أو -٢)

هـ المساحةُ الجانبية لمكعب حجمه ٢١٦سم^٣ = ...سم^٢ (٣٦ أو ٦ أو ١٤٤ أو ٢١٦)

و $\sqrt[٣]{س^٦} = \sqrt{.....}$ (س^٣ أو س^٢ أو س أو س^٤)

ز $\sqrt[٣]{-٢٧} + \sqrt{١٢\frac{١}{٤}} + \sqrt[٣]{٠,١٢٥} =$ .... (١ أو ٠ أو -١ أو $\frac{١١}{٢}$)

٤ **أوجد** قيمةَ س فى كلٍّ من الحالات الآتية:

أ $\sqrt[٣]{س} = ٥$
ب $\sqrt[٢]{س} = -\frac{١}{٢}$
جـ $\sqrt[٣]{س} = -\sqrt{٤}$

د س$^٣ = -٨$
هـ س$^٣ - ١٢٥ = ٠$
و س$^٢ = ٦٤$

٥ **أوجد** مجموعةَ الحلِّ لكلٍّ من المعادلات الآتية فى ن:

أ س$^٣ + ٢٧ = ٠$
ب ٨س$^٣ + ٧ = ٨$

جـ (س + ٣)$^٣ = ٣٤٣$
د (٥ س - ٢)$^٣ + ١٠ = ١٨$

٦ **مسائلُ تطبيقيةٌ**

أ إناءٌ مكعبُ الشكل سَعته لتر واحد ، احسب طول حرفه.

ب كرة حجمها $\frac{١٣٧٢}{٨١}\pi$ وحدة مكعبة. أوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣)

مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

تمارين (١-٢)

تذكر أن

ـ العدد النسبى هو الذى يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ $\in$ صـ، ب $\in$ صـ ، ب $\neq$ ٠

ـ العدد غير النسبى هو الذى لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ $\in$ صـ ، ب $\in$ صـ ، ب $\neq$ ٠

١ أكمل باستخدام أحد الرمزين ن أو نَ.

أ ٥ $\in$ ....   ب $\sqrt{١٠}$ $\in$ ....   جـ ٠ $\in$ ....

د -٠,٧ $\in$ ....   هـ $\sqrt[٣]{٨}$ $\in$ ....   و $\sqrt[٣]{٦}$ $\in$ ....

ز $\sqrt[٣]{-٩}$ $\in$ ....   ح π $\in$ ....

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصَّحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ ٢,٣ × ١٠^٥ $\in$ ن ( )   ب |-٥| $\in$ نَ ( )

جـ $\frac{صفر}{٥}$ $\in$ ن ( )   د $\sqrt[٣]{-٤}$ $\in$ نَ ( )

هـ $\sqrt{١٠٠٠}$ $\in$ ن ( )   و $\sqrt{٧}$ > ٣ ( )

ز $\sqrt[٣]{١٠}$ > ٢ ( )   ح $\sqrt[٣]{٢٠}$ > $\sqrt{٩}$ ( )

ط طول ضلع مربع مساحة سطحه ٦سم^٢ هو عدد نسبى. ( )

٣ اختر الاجابة الصحيحة من بين القوسين

أ المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٣}$ سم تكون مساحة سطحه = ... سم^٢ (٤ $\sqrt{٣}$ أو ٩ أو ٣ أو ٦)

ب العدد غير النسبى المحصور بين ٣ ، ٤ هو .... (٣,٥ أو $\frac{١}{٨}$ أو $\sqrt{٧}$ أو $\sqrt{١٠}$)

جـ العدد غير النسبى المحصور بين -٢، -١ هو .... (-٣ أو -$١\frac{١}{٢}$ أو -$\sqrt{٣}$ أو $\sqrt{٢}$)

ايجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى
تمارين (١-٣)

١ ضع دائرةً حولَ العددِ غير النسبيِّ فى كلٍّ مما يأتى:

$\sqrt{٣}$ ، -٠,٢ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، ٠ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $-\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}$

٢ **أوجد** قيمةَ س فى كلٍّ من الحالاتِ الآتية ، وبيِّن ما إذا كانت س ∈ ن أم س ∈ نَ

أ $٤س^٢ = ٩$ ب $٢س^٢ = ٦$ جـ $س^٣ = ١٢٥$

د $س^٣ = ١٠$ هـ $(س - ١)^٢ = ٤$ و $(س - ٢)^٣ = ١$

٣ **أوجد** قيمةً تقريبيةً للعدد $\sqrt{١٠}$ ، وتحقَّق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

٤ **فكّر** إذا كانت س عددًا صحيحًا فأوجد قيمة س فى كل من الحالات الآتية:

أ $س < \sqrt{٧} < س + ١$ ب $س < \sqrt{٨٠} < س + ١$ جـ $س < \sqrt{١٢٥} < س + ١$

د $س < \sqrt[٣]{٥} < س + ١$ هـ $س < \sqrt[٣]{٣٠} < س + ١$ و $س < \sqrt[٣]{١٠٠} < س + ١$

٥ **اختر** الإجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين أمام كل عبارة:

أ العدد غير النسبى المحصور بين ٢، ٣ هو .... ($\sqrt{١٠}$ أو $\sqrt{٧}$ أو ٢,٥ أو $\sqrt{٣}$).

ب $\sqrt{١٠}$ = ... (٢,٩٩ أو ٣,٧١ أو ٣ أو - ٣,٢).

جـ أقرب عددٍ صحيح للعدد $\sqrt[٣]{٢٥}$ هو .... (٥ أو ٣ أو ٢ أو ١٢,٥).

د المربع الذى مساحته ١٠سم^٢ يكون طول ضلعه ....سم (٥ أو -٥ أو $\sqrt{١٠}$ أو $-\sqrt{١٠}$).

هـ المكعب الذى حجمه ٦٤سم^٣ يكون طول حرفه ....سم (٨ أو ٤ أو ١٦ أو ٦٤).

٦ ارسم خطَّ الأعداد وحدِّد عليه النقطة أ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$

و النقطة ب التي تمثل العدد ١ + $\sqrt{٢}$

و النقطة جـ التى تمثل العدد ١ - $\sqrt{٢}$

٧ ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٢سم ، ب جـ = ٣سم واستخدم الشكل فى تحديدِ النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{١٣}$ ، والنقطة التى تمثل العدد - $\sqrt{١٣}$ على خطِّ الأعداد.

مجموعة الأعداد الحقيقية ح
تمارين (١-٤)

١ ادرس المخطط السابق وأجب بوضع علامة (✓) إذا كانت العبارة صحيحة وعلامة (✗) إذا كانت العبارة خطأ:

أ كل عدد طبيعى هو عدد صحيح . ( )

ب الصفر ∋ مجموعة الأعداد النسبية . ( )

جـ $ص = ص_+ \cup ص_-$ ( )

د أى عدد غير صحيح هو عدد نسبى . ( )

٢ أكمل الجدولَ التالى بوضع علامة (✓) فى المكان المناسب كما فى الحالة الأولى :

العدد	عدد طبيعى	عدد صحيح	عدد نسبى	عدد غير نسبى	عدد حقيقى
٥-	✗	✓	✓	✗	✓
$\sqrt{٢}$					
$١\frac{١}{٢}$					
$\sqrt[٣]{٩}$					
$\lvert -٢ \rvert$					
$-\sqrt{٤}$					
$\frac{٥}{٢}$					
٠,٣					
$\sqrt{-١}$					

علاقة الترتيب فى ح
تمارين (١-٥)

١ **رتِّب تنازليًا :** $\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

٢ إذا كانت س ∈ ح فاذكر ما إذا كانت س موجبة أو سالبة أو خلاف ذلك فى كل من الحالات الآتية:

أ س > ٠   ب س < ٠   جـ س > |-٥|

٣ **اثبت أن** $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨، مثِّل الأعداد $\sqrt{٣}$ ، ١,٧ ، ١,٨ على خطِّ الأعداد.

٤ أوجد طولَ ضلع مربع مساحته ٥سم^{٢}، هل طول الضلع عدد نسبى؟

٥ أوجد طولَ حرَف مكَعب حجمه ١,٧٢٨سم^{٣}، هل طول الحرف عدد نسبى؟

٦ **ضع العلامةَ المناسبةَ (> أو < أو =)**

أ $\sqrt{٥}$ .... ٢   ب $\sqrt{٧}$ .... ٢,٦   جـ $\sqrt[٣]{-٢٤}$ .... -٢

د ١ + $\sqrt{٢}$ .... $\sqrt{٣}$ هـ $\sqrt[٣]{٨}$ .... $\sqrt{٤}$ و ٣ - $\sqrt{٥}$ .... $\sqrt{-١}$

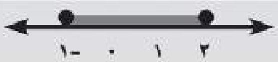
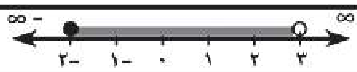
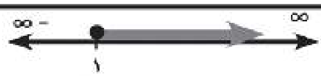
٧ أوجد طولَ ضلع مربع مساحته ٧سم٢، هل طول ضلعه و طول قطره عدد نسبى؟

٨ أوجد طولَ حرَف مكَعب حجمه ١٢٥سم^{٣}، هل طول الحرف عدد نسبى؟

٩ مكعب مساحته الكليه ١٣,٥سم٢، أوجد طول حرفه، هل طول الحرف عدد نسبى؟

الفترات
تمارين (١ – ٦)

١ **أكمل** الجدولَ الآتى كما بالمثال الأول:

الفترة	التَّعبير بصورةِ الصِّفة المميزة	تمثيلها على خطِّ الأعداد
$[-١ ، ٢]$	$\{س : -١ \leq س \leq ٢ ، س \in ح\}$	
$[١ ، ٣[$		
$]-\infty ، ٢]$		
	$\{س : ٠ < س \leq ٣ ، س \in ح\}$	
	$\{س : س < -١ ، س \in ح\}$	
		
		
$]١ ، ٥[$		
	$\{س : س < ٠ ، س \in ح\}$	

٢ **أكمل** بوضعِ أحد الرموز $\in$ أو $\notin$:

أ) ٣ .... $[٢ ، ٣]$
ب) $(\sqrt[3]{-١})$ .... $]-\infty ، ١[$
جـ) ٢ .... $\{١ ، ٧\}$
د) $\sqrt{٩}$ .... $]-٣ ، \infty[$
هـ) $|-٢|$ .... $[٢ ، \infty[$
و) $١,٣ \times ١٠^{-٥}$ .... $ح_+$

٣ **اختر** الإجابةَ الصحيحةَ من بين الأقواس :

أ) $[٢ ، ٧] - \{٢ ، ٧\} =$ .... ($[١ ، ٦]$ أو $\emptyset$ أو $]٢ ، ٧[$ أو $\{٠\}$)
ب) $[٠ ، ٥] \cup [٣ ، ٨[=$ .... ($]٣ ، ٥]$ أو $[٣ ، ٥]$ أو $[٠ ، ٨]$ أو $[٠ ، ٨[$)
جـ) $[١ ، ٥] \cap]-٢ ، ٣] =$ .... ($\{١ ، ٣\}$ أو $]١ ، ٣[$ أو $[١ ، ٣]$ أو $[١ ، ٣[$)
د) $]-١ ، ٢[- [١ ، ٤] =$ .... ($]-١ ، ١[$ أو $\{-١ ، ١\}$ أو $]-١ ، ١[$ أو $[-١ ، ١]$)

٤ **إذا كانت** $س = [-١ ، ٤]$ ، $ص = [٣ ، \infty[$ ، $ع = \{٣ ، ٤\}$ **أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًّا من:**

أ) $س \cup ص$ ب) $س \cap ص$ جـ) $س - ص$ د) $س - ع$
هـ) $ص \cap ع$ و) $ص - س$ ز) $س'$ ح) $ص'$

العمليات على الأعداد الحقيقية
تمارين (١ – ٧)

١ اختر الإجابةَ الصحيحة من بين الأقواس أمام كلِّ عبارة:

أ $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \dots\dots$ ($5\sqrt{6}$ أو $5\sqrt{3}$ أو $6\sqrt{3}$ أو $5\sqrt[2]{3}$)

ب $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} = \dots\dots$ ($\sqrt[3]{10}$ أو 5 أو $2\sqrt[3]{5}$ أو $5\sqrt[3]{5}$)

جـ $5 + 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} = \dots\dots$ (15 أو $1 + 7\sqrt{2}$ أو $1 + 8\sqrt{2}$ أو $1 + 6\sqrt{2}$)

د $-2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \dots\dots$ (-6 أو $-2\sqrt{3}$ أو $2\sqrt{3}$ أو 6)

هـ $\frac{6}{\sqrt{3}} = \dots\dots$ ($\sqrt{2}$ أو 2 أو $2\sqrt{3}$ أو $6\sqrt{3}$)

و $(2\sqrt[3]{5})^3 = \dots\dots$ (10 أو 20 أو $4\sqrt[3]{5}$ أو 40)

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

أ $\sqrt{2}\,(5 + \sqrt{2})$

ب $\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + 2)$

جـ $-\sqrt{3}\,(-5 - \sqrt{3})$

د $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

٣ اكتب كلًّا من الأعدادِ الآتية بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا:

أ $\frac{10}{\sqrt{5}}$

ب $\frac{8}{\sqrt{6}}$

جـ $\frac{6}{2\sqrt{3}}$

د $\frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2}}$

٤ اختصر إلى أبسطِ صورة:

أ $2\sqrt{3} + 5 + \sqrt{3} - 6$

ب $2\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + \sqrt{7} + 5\sqrt{7}$

جـ $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 1)$

د $\sqrt{5}\,(3 - \sqrt{5}) - 2(1 + \sqrt{5})$

٥ إذا كانت أ = $\sqrt{3} + 2$ ، ب = $\sqrt{3} - 2$ **أوجد قيمة كل من:**

أ أ + ب

ب أ - ب

جـ أ ب

٦ إذا كانت س = $\sqrt{15} + 2$ ، ص = $4 - \sqrt[3]{25}$ **قدِّر قيمة كل من :**

أ س ، ص

ب س × ص

جـ س + ص

اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

العمليات على الجذور التربيعية
تمارين (١ – ٨)

١ اختر الإجابةَ الصَّحيحةَ من بين القوسينِ أمامَ كل عبارة:

أ $\sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} - \sqrt{٢} =$ .... ($\sqrt{٣٠}$ أو $\sqrt{٢}$ أو ٢ أو $٢\sqrt{٢}$)

ب $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} + \sqrt{٥}) =$ .... (٢ أو ١٢ أو $٢\sqrt{٧}$ أو $-٢\sqrt{٥}$)

ج $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^٢ =$ .... ($\sqrt{١٠}$ أو ١٠ أو ١٨ أو $\sqrt{١٨}$)

د المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو .... ($-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ أو $٦\sqrt{٣}$ أو $٢\sqrt{٣}$ أو $-٢\sqrt{٣}$)

هـ العدد التالى فى النمط: $\sqrt{٣}$، $\sqrt{١٢}$، $\sqrt{٢٧}$، $\sqrt{٤٨}$ هو ($\sqrt{٥٠}$ أو $\sqrt{٧٥}$ أو $\sqrt{٦٠}$ أو $\sqrt{٩٠}$)

٢ أكمل لتحصلَ على عبارة صحيحة:

أ إذا كانت س $= ٣ + \sqrt{٢}$ فإن مرافقها .... وحاصل ضربهما ....

ب المعكوسُ الضربيُّ للعدد $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ فى أبسط صورة هو ....

ج **فكّر** إذا كانت س$^٢ = ٥$ فإن (س $+ \sqrt{٥})^٢ =$ .... أو ....

د **فكّر** إذا كانت $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فإن قيمة س فى أبسط صورة هى ....

هـ $٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨} =$ ....

٣ اختصر لأبسط صورة $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$

٤ إذا كانت س $= \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$ ، ص $= \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ فأوجد قيمة س^٢ ص^٢

٥ إذا كان أ $= \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ب $= \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ أوجد قيمة أ^٢ - ب^٢ فى أبسط صورة.

٦ إذا كانت س $= \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، ص $= \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار $\frac{س + ص}{س ص - ١}$

٧ إذا كانت س $= \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، ص $= \frac{٢}{س}$

أوجد قيمةَ المقدار $\frac{س + ص}{س ص}$ **فى أبسط صورة.**

العمليات على الجذور التكعيبية
تمارين (١ – ٩)

١ ضع كلًّا مما يأتى على صورة $أ\sqrt[٣]{ب}$ حيث أ، ب عددان صحيحان، ب أصغر قيمةٍ موجبة ممكنة.

أ $\sqrt[٣]{٥٤}$ ب $\sqrt[٣]{-١٠٠٠}$ جـ $\sqrt[٣]{١٢٨}$

د $\sqrt[٣]{-٢١٦٠}$ هـ $\sqrt[٣]{١٧١٥}$ و $\sqrt[٣]{٦٨٦}$

٢ **أوجد** ناتج كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:

أ $\sqrt[٣]{١٢٥} - \sqrt[٣]{٢٤}$ ب $\sqrt[٣]{٢٥٠} - \sqrt[٣]{١٢٨}$ جـ $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٥}} \times \sqrt[٣]{\frac{٤}{٢٥}}$

د $\sqrt[٣]{\frac{٣}{٤}} \div \sqrt[٣]{\frac{٢}{٩}}$ هـ $\frac{١}{٢}\sqrt[٣]{٥٦} - \sqrt[٣]{\frac{٧}{٢٧}}$ و $\frac{١}{٢}\sqrt[٣]{١٠} \times ٦\sqrt[٣]{١٠٠}$

٣ إذا كانت $أ = \sqrt[٣]{٥} + ١$ ، $ب = \sqrt[٣]{٥} - ١$ احسب قيمَة كلٍّ من:

أ $(أ - ب)^{٥}$ ب $(أ + ب)^{٣}$

٤ **اثبت أن**

أ $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{١٦} - ٢\sqrt[٣]{٥٤} =$ صفر

ب $\sqrt[٣]{٥٤} \times \sqrt[٣]{١٦} \div (\sqrt[٣]{٤} \times ٦) = ١$

٥ اختر الاجابه الصحيحه مما بين القوسين :

أ إذا كانت $س = \sqrt[٢]{٣} + ١$ ، $ص = \sqrt[٢]{٣} - ١$ ، فإن $(س+ص)^{٢} =$ ....

(٨ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤)

ب $٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} + (\sqrt{٢})^{صفر} + \left(\frac{٢}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} - \sqrt[٣]{٣٢} =$ ....

($٤\sqrt[٣]{٢}$ + ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$)

جـ إذا كانت $س = \sqrt[٢]{٣} + \sqrt[٢]{٥}$ ، $ص = \sqrt[٢]{٣} - \sqrt[٢]{٥}$ ، فإن $(س-ص)^{٢} =$ ....

(٦ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٤٠)

د $\sqrt[٣]{-٢٧} + \sqrt{\frac{٤٩}{٤}} + \sqrt[٣]{٠,١٢٥} =$ .... (١ ، صفر ، -١ ، $\frac{٧}{٢}$)

هـ $\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٢} =$ .... ($\sqrt[٣]{١٤}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ ، ٨ ، $\sqrt[٣]{٨}$)

و $\sqrt[٣]{٢٤} - ٩\sqrt[٣]{\frac{٨}{٩}} =$ .... ($-٨\sqrt[٣]{٣}$ ، $٢٠\sqrt[٣]{٩}$ ، $١٢\sqrt[٣]{٣}$ ، $٨\sqrt[٣]{٣}$)

تطبيقات على الأعداد الحقيقة
تمارين (١ – ١٠)

١ **اختر الاجابة الصحيحة من بين الأقواس:**

أ المساحة الجانبية للاسطوانة الدائرية القائمة التى طول قطر قاعدتها ل وارتفاعها ع
(π ل^{٢}ع ، π ل ع ، ٢ π ل ع ، π ل ع^٢)

ب حجم كرة طول قطرها ٦سم = ... سم^٣ (٢٨٨ ، ١٢ π ، ٣٦ π ، ٢٨٨ π)

جـ مكعب حجمه ٢$\sqrt{٢}$ سم٣ فأن طول حرفه = ... سم
($\sqrt{٢}$ ، ٢ ، ٨ ، ١,٥)

د طول نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٤٠π سم^٣ وارتفاعها ١٠سم يساوى ... سم
(٥ ، ٣ ، ٢ ، ١)

هـ متوازى المستطيلات الذى ابعاده $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ من السنتيمترات يكون حجمه = ...
(٦ ، ٣٦ ، ٦$\sqrt{٦}$ ، ١٨$\sqrt{٢}$)

٢ **أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:**

أ الكرة التى حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^٣ يكون طول نصف قطرها ...... سم

ب اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها نق، وارتفاعها ع
فإن مساحتها الجانبية = ... وحجمها = ...

جـ مكعب طول حرفه ٤سم فإن مساحته الكلية = ... سم^٢

د المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = ...

٣ **كرة حجمها ٣٦ π سم^٣ وضعت داخل مكعب مست أوجه المكعب الستة أوجد:**

أ طول نصف قطر الكرة ب حجم المكعب

٤ كرة من المعدن طول قطرها ٦سم صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣سم احسب ارتفاع الاسطوانة.

٥ إذا كان ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها اوجد ارتفاع الاسطوانة علمًا بأن حجمها ٧٢ π سم^٣.

٦ كرة معدنية جوفاء طول نصف قطرها الداخلى ٢,١سم وطول نصف قطرها الخارجى ٣,٥سم.
أوجد كتلتها لأقرب جرام علمًا بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠جم ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح
تمارين (١ - ١١)

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ حيث س ∋ ح

أ إذا كان ٥ س < ١٥ فإن س .... ب إذا كان س -٣ ⩽ ٤ فإن س ....

جـ إذا كان -٢ س ⩾ ٣ فإن س .... د إذا كان ١ - س > ٤ فإن س ....

هـ إذا كان √٢ س ⩽ ٤ فإن س ....

٢ **أوجد** على صورةِ فترة مجموعةَ الحلِّ فى ح لكلٍّ من المتبايناتِ التاليةِ، ومثل الحل على خطِّ الأعداد:

أ ٣س -١ < ٥ ب ٢ س + ٥ ⩽ ٣ جـ ٢ س + ٣ ⩾ ١

د ٥ -س > ٣ هـ ١ - ٥س < ٦ و ١/٢ س + ١ ⩾ ٢

٣ **أوجد** على صورة فترة مجموعة الحلِّ فى ح لكلٍّ من المتباينات التالية ، ومثل الحل على خطِّ الأعداد:

أ -١ ⩾ ٢ س + ١ < ٥ ب -٥ ⩾ ٢ س - ٣ ⩾ ١

جـ -٣ ⩾ ٤س - ٧ ⩾ ٥ د ٤ < ٣ س + ٤ < ٧

هـ ١ < ٥ - س ⩾ ٣ و ١ ⩾ ٣ - ٢ س < ٥

٤ **أوجد** على صورة فترة مجموعة الحلِّ فى ح لكلٍّ من المتباينات التالية، ومثل الحل على خطِّ الأعداد:

أ -٣ ⩾ -س < ٣ ب |-٣| < ٢س - ١ < ٥

جـ ∛-٨ ⩾ س + ١ ⩾ √٩ د ٥ < ٣ - س ⩾ ٣^٢

تمارين عامة على الأعداد الحقيقية

١ **أكمل** لتحصلَ على عبارةٍ صحيحة:

أ $\sqrt{٩} + \sqrt[٣]{-٨} = ...$

ب إناءٌ على شكلٍ مكعبٍ سعته ٨ لترات يكون طول حرفه الداخلى = ... سم.

جـ مجموعة الحلِّ فى ح للمعادلة $س^{٢} + ٩ = ٠$ هى ....

د $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٢} + (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٢} = ...$

هـ المستطيلُ الذى بعداه $(\sqrt{٥} + ١)$ سم، $(\sqrt{٥} - ١)$ سم تكون مساحته = ...سم^{٢}.

و $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{-١٦} = \sqrt[٣]{......}$

ز $[-١، ٥] - [-١، ٥[= ....$

ح مجموعةُ الحلِّ فى ح للمعادلة $\sqrt{٢}\ س - ١ = ٣$ هى ....

ط الكرةُ التى طول قطرها ٦ ل وحدة طولية يكون حجمها .... وحدة مكعبة.

ى $|\sqrt[٣]{-١٢٥}| = \sqrt{......}$

٢ **أوجد** على صورةِ فترة مجموعةَ الحلِّ فى ح لكلٍّ من المتباينات التالية ، ومثِّل الحلَّ على خطِّ الأعداد:

أ $٥ س - ٣ < ٢ س + ٩$

ب $٣ - ٤ س \leqslant س - ٢$

جـ $س \leqslant ٢س - ١ \leqslant س + ٣$

د $س - ١ < ٣ س - ١ \leqslant س + ١$

هـ $٤ س \leqslant ٥ س + ٢ < ٤س + ٣$

و $٥ س + ٧ < ٦ س < ٥ س$

٣ إذا كانت $س = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٦} - \sqrt{٥}}$ فأثبت أن $س + \frac{١}{س} = ٢٢$

٤ **أوجد** فى أبسط صورة: $\sqrt[٣]{٥٤} + ٤ \sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} - \sqrt[٣]{-٢}$

٥ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمها ٧٢ π سم^{٣}، ارتفاعُها ٨سم. أوجد مساحتها الكلية.

٦ **أوجد** مستعينًا بخطِّ الأعداد [٣، ٦[$\cap$ [٤، ٧[

٧ إذا كانت س = $\frac{٥\sqrt{٢}+٣\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ، ص = $\frac{٢\sqrt{٥}-٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

فأوجد قيمة أ س^{٢} + ص^{٢} ب س ص **وأثبت أن** س^{٢} + ص^{٢} = ٣٨ س ص

٨ إذا كانت س = $\sqrt[٣]{٥}$ + ٢، ص = $\sqrt[٣]{٥}$ - ٢

فأوجد قيمة (س + ص)^{٢} + (س - ص)^{٢}.

٩ إذا كانت س = $\sqrt{٥}$ - $\sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢})

١٠ إذا كانت أ = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ ، ب = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٢}$

فأوجد قيمة أ^{٢} - أ ب + ب^{٢}

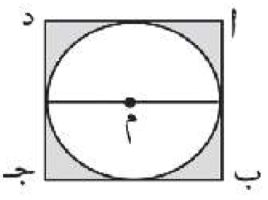
١١ إذا كانت س = $\frac{٣\sqrt{٥}+٥\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$ ، ص = $\frac{٢\sqrt{٥}-٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

فأثبت أن $\frac{س^{٢}+ص^{٢}}{س\,ص}$ = ٣٨

١٢ فى الشكل المقابل : دائرة مرسومة داخل

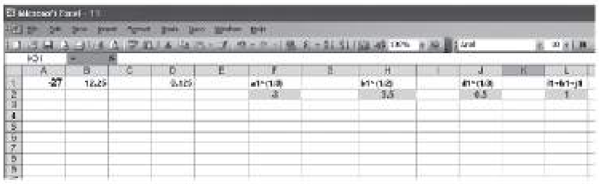
المربع أ ب جـ د فإذا كانت مساحه الجزء

المظلل $\frac{١}{٤}$٤٧ سم٢ أوجد محيط هذا الجزء ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



١٣ قطعه من الورق على شكل مستطيل أ ب جـ د ، فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٤٤ سم ، طويت على شكل أسطوانه دائريه قائمه ، بحيث ينطبق $\overline{أب}$ على $\overline{دجـ}$ أوجد حجم الاسطوانه الناتجة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

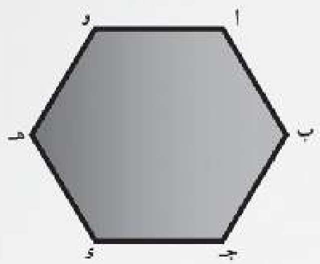
نشاط تكنولوجى



أوجد: $\sqrt[3]{٢٧} + \sqrt{١٢\frac{١}{٤}} + \sqrt[3]{٠,١٢٥}$

- افتح برنامج إكسل وسجل الأرقام المبينة فى الخلايا A1، B1، D1
- لإيجاد الجذر التكعيبى للخلية A1، اكتب فى الخلية F1، الشكل الآتى =(1/3)^A1 ثم ENTER يصبح الناتج -٣
- لإيجاد الجذر التربيعى للخلية B1 اكتب في الخلية H2 الشكل الآتى (1/2)^B1 ثم ENTER يظهر الناتج ٣,٥
- لإيجاد الجذر التكعيبى للخلية J1 اكتب فى الخلية J2 الشكل الأتى (1/3)^D1ثم ENTER يظهر الناتج ٠,٥
- اكتب فى الخلية L2 حاصل جمع F2 + H2 + J2 بعد كتابة يساوى يظهر الناتج ١

نشاط



نشاط **ارسم شكلاً سداسيًّا منتظمًا طول ضلعه ٤سم.**

١ **أوجد** قياس زاويته الداخلة.

٢ ارسم أقطاره $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{جـ و}$
استنتج طول كلٍّ منها بدون قياس.

٣ ارسم دائرة تمر برؤوسه. ٤ أوجد مساحته.

اختبار الوحدة

١ أكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

أ] -٣، ٢ [∩ $ح_-$ = ...

ب المعكوسُ الضربيُّ للعدد $-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو ....

جـ $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، .... أكمل بنفس التسلسل.

د إذا كانت س = $\sqrt[3]{٣}$ + ٧، ص = $\sqrt[3]{٣}$ - ٧ فإن (س + ص)^{٣} = ...

هـ الدائرةُ التى محيطها ٢٠ π سم تكون مساحتها .... π سم^{٢}

٢ اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين الأقواس أمام كل عبارة :

أ مكعب حجمه ٦٤سم٣ فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢} (٤ أو ٨ أو ٦٤ أو ٩٦)

ب $\sqrt{١٢}$ - $\sqrt{٣}$ = (٣ أو $\sqrt{٣}$ أو ٢$\sqrt{٣}$ أو ٣$\sqrt{٣}$)

جـ المعكوس الضربى للعدد $\frac{-\sqrt{٦}}{١٢}$ هو ($\frac{١٢}{\sqrt{٦}}$ أو $\frac{\sqrt{٦}}{١٢}$ أو -٢$\sqrt{٦}$ أو ٢$\sqrt{٦}$)

د $\sqrt[3]{٥٤}$ + $\sqrt[3]{-٢}$ = ($\sqrt[3]{٥٢}$ أو $\sqrt[3]{٢}$ أو ٢$\sqrt[3]{٢}$ أو ٤$\sqrt[3]{٢}$)

هـ [-٣، ٤] - {-٣، ٥} = ( ]-٣، ٤[أو]-٣، ٤] أو]-٣، ٥[أو [-٣، ٤[ )

٣ اختصر لأبسط صورة ٢$\sqrt{١٨}$ + $\sqrt{٥٠}$ + $\frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$

٤ متوازى مستطيلات مصنوع من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧سم، ٢٤سم، ٢١سم، شكلت منه مادة لتكون كرة. أوجد طول نصف قطرها. ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

٥ إذا كانت أ = $\frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}}$ ، ب = $\frac{٤}{\sqrt{٧}+\sqrt{٣}}$ **أوجد قيمة** $\frac{أ - ب}{أ ب}$

٦ مستعينًا بخطِّ الأعداد أوجد]-١، ٣] ∪ [٠، ٥[على صورة فترة

٧ أسطوانةٌ دائريةٌ قائمة حجمها ٩٢٤سم^{٣} ، وارتفاعها ٦سم **أوجد مساحتها الجانبية** ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$).

٨ إذا كانت س = $\sqrt{١٠}$ + ٢ ، ص = $\sqrt[3]{٢٦}$ - ١ أعط تقديرًا لحاصل ضرب س × ص واستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الفرقِ بين تقديرك والإجابة الصحيحة.

٩ أوجد مجموعةَ الحلِّ فى ح ومثل الحل على خط الأعداد

أ ١ > ٢ س + ٣ ≥ ٩

ب س + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٣

الوحدة الثانية

العلاقة بين متغرين

تمارين (٢-١)

١ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كل من العلاقات الآتيه ، ومثلها بيانيا :

(أ) س + ص = ٥ (ب) ٢س - ص = ٣

(جـ) ٣س - ص = ٨ (د) ٢س - ٣ص = ٤

(هـ) ٢ص - ٥ = ٠ (و) ص - ٢س = ٠

(ز) س +٣ =٠ (ح) س + ص +٣ =٠

٢ الجدول الآتى يمثل العلاقة بين المتغير س ، ص : حيث ص = أس + ب

س	١	٢	٣	٤
ص	٣	ك	٩	١٢

أ ـ أوجد قيمه ك ب ـ مثل هذه العلاقة بيانياً

٣ إذا كانت (٣ ، -١) تحقق العلاقة : ٥ س + ب ص = ١٨ فأوجد قيمة ب

٤ إذا كانت (ك , ٢ ك) تحقق العلاقة : ٢ س - ٥ ص = ٨ فأوجد قيمة ك

٥ **مثّل بيانيًا كلًّا من العَلاقات الآتية:** أ س + ص = ٢ ب ٢ س – ص = ٣

٦ مثّل المستقيمَ الذى يمثّل العَلاقة ٢س + ٣ص = ٦، و إذا كان هذا المستقيم يقطعُ محورَ السينات فى النقطة أ ويقطعُ محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث نقطة و هى نقطة الوصل.

٧ ارسم المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٤ ص - ٣ س = ١٢ و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ، و يقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أب حيث ونقطة الأصل .

ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية
تمارين (٢-٢)

١ أكمل لتحصلَ على عبارةٍ صحيحة:

أ إذا كان أ (١، ٣) ، ب(٢، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يساوى ....

ب إذا كان (-١، ٥) يحقق العلاقة ٣ س + ك ص = ٧ فإن ك = ...

جـ أى مستقيمٍ يوازى محور السينات ميله = ...

د أى مستقيمٍ يوازى محور الصادات ميله ....

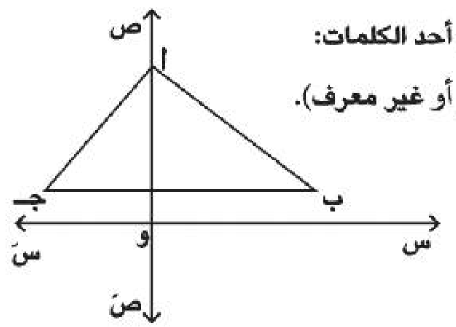
هـ إذا كانت أ، ب، جـ على استقامة واحدة فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ميل ....

٢ مع عصام ١٠ ورقات مالية فئة ٥ جنيهات، وأوراق مالية فئة ٢٠ جنيهًا، اشترى عصام من المركز التِّجارى بما قيمته ٦٥ جنيهًا ، حدِّد الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التى معه، وأوجد العَلاقةَ بين عددِ كل منها ومثلها بيانيًّا.

٣ إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيه، و ثمن الكرسى ٥٠ جنيهًا ، فإذا باع المتجرُ فى أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيه، فما هى التوقعاتُ الممثلةُ لعددِ الطاولاتِ التى باعها ، وعدد الكراسى. مثِّل هذه العَلاقة بيانيًّا؟

٤ فى الشَّكل المقابل المثلث أ ب جـ أكمل باستخدام أحد الكلمات:

(موجب أو سالب أو صفر أو غير معرف).



أ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ....

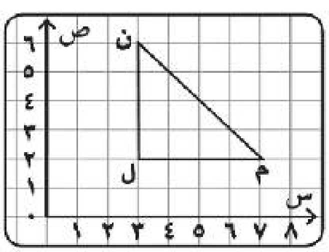
ب ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ....

جـ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ....

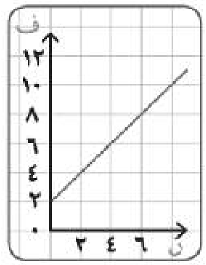
د ميل $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ....

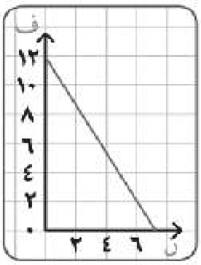
٥ فى الشكل المقابل:

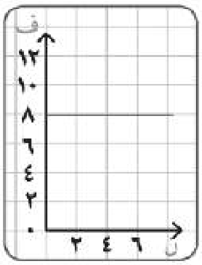
ل م ن مثلثٌ قائم الزاوية فى ل ، ق (∠ م) = ٤٥° فإذا كان ل (٣، ٢)، م (٧، ٢) أوجد إحداثى ن واحسب ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.



٦ كلٌّ من الأشكال التالية يوضِّحُ العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم. حدد موضعَ الجسمِ عند بدأ الحركة، وعند ن = ٦ ثوان ، وأوجد ميلَ المستقيم فى كلِّ حالةٍ (ماذا يمثل الميل؟).

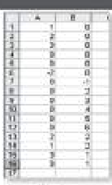






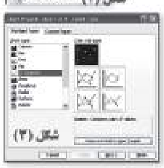
تكنولوجيا

١ افتح برنامج EXCEL لرسم محورى س ، ص دون الارقام المبينة بالشكل (١) فى العمود الاول A ، العمود B


شكل (١)

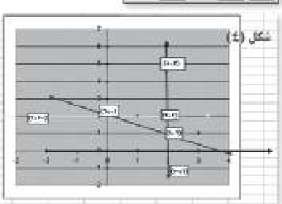

شكل (٢)

٢ بالماوس ظلل العموديين ثم من قائمة insert اختر Chart شكل (٢) ثم xy scatter شكل (٣) ثم next ثم finish يظهر محورى س، ص


شكل (٣)

٣ اضغط بالماوس ▭ من قائمة الرسم اسفل صفحة EXCEL وحدد قيم النقط كما بالشكل (٤)

٤ ثم اضغط بالماوس على علامة

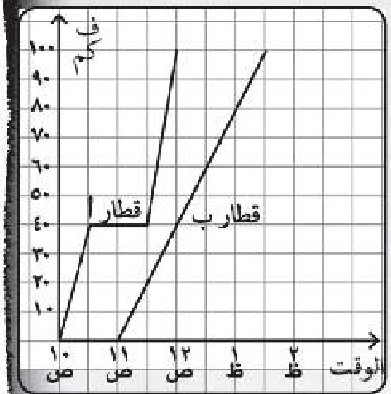

شكل (٤)

أ ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (٢ ، ١) و (٠ ، ٢)
يصبح الميل يساوى (٢ - ١) / (٠ - ٢) يساوى - $\frac{١}{٢}$ الخط الازرق

ب ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (٢ ، ٢) و (-٣ ، ٢)
يصبح الميل يساوى (٢ - ٢) / (-٣ - ٢) يساوى صفر
اى الميل يوازى محور السينات الخط الاصفر

جـ ارسم مستقيم يمر بكل من النقطتين (٢ ، -١) و (٢ ، ٥) يصبح الميل يساوى (٥ - (-١)) / (٢ - ٢) الميل غير معرف
اى الميل يوازى محور الصادات الخط الاحمر

نشاط



الشكلُ المقابلُ يوضِّحُ العلاقةَ بَين المسافةِ ف، والزمن ن لحركة قطارين أ، ب بين محطتين، حيث ف (بالكيلو متر)، ن (بالساعة) استخدم الرسم لإيجاد قيمة:

- **أ** البعد بين المحطتين.
- **ب** الزمن الذى استغرقه كلٌّ من القطارين.
- **جـ** السرعة المتوسطة لكلٍّ منهما.
- **د** ما دلالةُ القطعةِ المستقيمة فى حركة القطار أ.

○ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الكلى الذى قطعت فيه المسافة}}$.

اختبار الوحدة

١ اختر الإجابةَ الصحيحةَ من بين القوسينِ أمامَ كلِّ عبارة:

أ أىُّ الأزواجِ المرتبة التالية تحقِّق العلاقة ٢ س + ص = ٥

((-١،٣) أو (١،٣) أو (٣،١) أو (٢،٢))

ب أىُّ العلاقاتِ الآتية توضِّح العلاقة بين س ، ص الموضحة بالجدول المقابل.

س	٣	٤	٥
ص	١٠	١٣	١٦

(ص = س + ٧ أو ص = س - ٧ أو ص = ٣س + ١ أو ص = س + ١

جـ إذا كان أ (٢، ٥)، ب (٥ ، -١) فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ...

(-$\frac{١}{٣}$ أو -٣ أو ٣ أو $\frac{١}{٣}$)

د العلاقة ٣س + ٨ص = ٢٤ يمثلها مستقيمٌ يقطعُ محوَر الصَّادات فى النقطة.

((٠،٨) أو (٨،٠) أو (٠ ، ٣) أو (٣،٠))

٢ إذا كانت أ = (٢، -١)، ب (١٠، ٣)، جـ (٢، ٣) أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، ارسم المثلثَ أ ب جـ على الشبكةِ التَّربيعيةِ ، ثم حدِّد نوعَ المثلث أ ب جـ بالنسبة لقياسات زواياه.

٣ ملأ عاطفٌ خزانَ سيارته بالوقود، وسعته ٥٠ لترًا ، وبعد أن قطع مسافة ١٠٠ كم، لاحظ أن مؤشر عداد الوقود يشير إلى أن الخزان به $\frac{٤}{٥}$ سعته. ارسم الشكل البيانى للعلاقة بين المسافةِ المقطوعةِ وكميةِ الوقود بالخزان التى تتحركها السيارة ليكون الخزان فارغًا.

الوحدة الثالثة

جمع البيانات وتنظمها

تمارين (٣ – ١)

١ فيمايلى الأجر الأسبوعى بالجنيهات لأربعين عاملاً فى أحد المصانع

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

والمطلوب عمل جدول تكرارى ذى مجموعات (خذ المجموعات الجزئية: ٣٠ -، ٤٠ -، ٥٠ -، ...، ٩٠ –)

٢٥	٣٥	٤٠	٢٠	٣٠	٣٧	٤٠	٣٣	٢٢	٣٨
٣٥	٣٦	٢٨	٣٧	٣٩	٢٨	٣٢	٢٦	٢٩	٣٧
٢٣	٣٤	٣٥	٣٦	٢٩	٣٨	٤٠	٣٥	٣٧	٣١

وما المجموع

المطلوب:

أ كون جدول تكرارى ذى مجموعات لهذه الدرجات

ب أوجد عدد التلاميذ الممتازين إذا كانت أقل درجة ليكون التلميذ ممتازًا هى ٣٦ درجة

٣ تبين البيانات التالية عدد أيام الإجازات التى حصل عليها ٤٠ عامل خلال سنة كاملة

١١	٢٧	١٤	٢٥	١٣	٢٨	١٤	٢٦	٣٠	١٥
٢٩	٢١	١٧	٢١	٢٢	١٥	١٦	٢١	١٦	٢٤
٢٦	١٥	٢٠	٢٠	٢٤	٣٠	٢٠	١٥	٢١	٢٦
١٥	٣٠	٢٨	٢٢	٢٦	٢٢	٢٧	٢٠	٣٠	٢٩

المطلوب:

أ تكون الجدول التكرارى لهذه البيانات

ب إيجاد عدد العمال الذين حصلوا على أجازات أكثر من ٢٠ يوماً فى السنة.

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيا

تمارين (٣ – ٢)

١ البياناتُ التالية لدرجات ١٠٠ طالب فى امتحان تجريبى لمادة الرياضيات.

المجموعات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

والمطلوب:

أ تكوين كلٍّ من الجدولِ التكراريِّ المتجمع الصّاعد والنازل.

ب رسم المنحنى التّكرارى المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البيانى.

جـ من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة، والحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر.

د النسبةُ المئويةُ لنجاح الطلاب، علما بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة.

هـ ما النسبةُ المئويةُ للطلاب الحاصلين على أكثر من ٤٥ درجة.؟

٢ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب: رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر اليومى لمجموعة من العمال .

المجموعات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٤	٢٤	٣٠	١٢	١٠	١٠٠

والمطلوب: رسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع

٤ الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملا بأحد المصانع.

المجموعات	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	المجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٣	....	٥	٣	٥٠

والمطلوب:

أ أكمل الجدول.

ب ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

جـ من الرسم أوجد:

أولاً : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٢ سنة

ثانيًا: عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٣ سنة

٥ **فيمايلى التوزيع التكرارى الذى يبين درجات ١٠٠٠ طالب فى إحدى المواد.**

النسبة المئوية	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	المجموع
عدد الطلبة	٣٠	٧٠	١٦٠	٢٦٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٠	١٠٠٠

والمطلوب:

أ رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

ب عدد التلاميذ الحاصلين على أقل من ٧٥ درجة.

جـ عدد التلاميذ الحاصلين على أكثر من ٨٥ درجة.

الوسط الحسابى والوسيط والمنوال
تمارين (٣ – ٣)

١ الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد أيام الأجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عاملا .

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦
التكرار	٤	٥	٨	ك-٢	٧	٥	١

أوجد: أولاً: قيمة ك **ثانيا:** الوسط الحسابى لهذا التوزيع

٢ الجدول الآتى يبين توزيع ١٢٠ طالبا حسب أطوالهم بالسنتيمترات .

الطول بالسنتيمتر	-١٤٠	-١٤٤	-١٤٨	-١٥٢	-١٥٦	-١٦٠	المجموع
التكرار	١٢	٢٠	٣٨	٢٢	١٧	١١	١٢٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع

٣ فيمايلى توزيع الأجور لبعض العاملين فى أحد المصانع.

مجموعات الأجور	-٣٠٠	-٤٠٠	-٥٠٠	-٦٠٠	-٧٠٠	المجموع
عدد العمال	٨	١٢	١٨	٧	٥	٥٠

ارسم منحنى التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم أوجد الأجر الوسيط

٤ فى الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى.

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	س -	-٦٠	المجموع
التكرار	١٢	١٥	٢٥	٢٧	ك + ٤	٤	١٠٠

أولاً: أوجد قيمة كل من س ، ك

ثانيًا: ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط.

٥ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذا بالكيلو جرام بأحدى المدارس

الوزن بالكيلو جرام	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	-٥٥	المجموع
عدد التلاميذ	ك + ٤	٣ك	٤ك	٣ك + ١	٣ك - ١	ك + ١	٥٠

أولاً: أوجد قيمة ك   **ثانيًا:** ارسم المدرج التكرارى وأوجد الوزن المنوالى

٦ الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لأطوال ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس

الطول بالسنتيمتر	-١١٠	-١١٥	-١٢٠	-١٢٥	-١٣٠	-١٣٥	-١٤٠	المجموع
عدد التلاميذ	١٠	١٢	٢٨	٣٥	٦٠	٤٠	١٥	٢٠٠

ارسم المدرج التكرارى لهذا لتوزيع وأوجد الطول المنوالى

تمارين عامة على الإحصاء

١ الجدولُ الآتى يبين التَّوزيعَ التكراريَّ لدرجات ٥٠ طالبًا فى أحد الاختبارات:

المجموعات	٢ -	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨ -	٢٢ -	٢٦ -	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد أولًا: الوسطَ الحسابيّ لدرجة الطالب. **ثانيًا:** الوسيط

٢ من الجدولِ التكراريِّ التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى أوجد:

المجموعات	١٠-	٢٠-	س -	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

أولاً: أوجد قيمة كل من س ، ك

ثانيًا: ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل، ثم احسب الوسيط.

٣ **أوجد** المنوالَ للتوزيعِ التَّكراريِّ التالى لدرجاتِ ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات:

مجموعات الدرجات	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠	المجموع
التكرار	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠

٤ الجدولُ الآتى يبيِّن التوزيعَ التكراريَّ ذى المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعيَّة لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع.

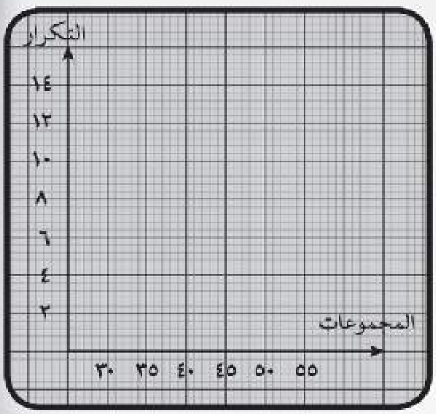
مجموعة الأجر بالجنيه	٧٠ -	٨٠ -	٩٠ -	١٠٠ -	س -	١٢٠ -	١٣٠ -
عدد العمال	١٠	١٣	ك - ٤	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد (أ) قيمةَ كلٍّ من س، ك (ب) الأجر المنوالى بالجنيه

نشاط

الجدولُ الآتى يبيِّن التوزيعَ التكراريَّ لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس.

الوزن بالكيلو جرام	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -	٥٥ -	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ك	٤ك	١٠	٨	٤	٥٠



أولاً: أوجد قيمة ك.

ثانيًا: احسب الوسطَ الحسابيَّ.

ثالثًا: ارسم المنحنى التكراريَّ المتجمعَ الصاعد.

رابعًا: ارسم المدرجَ التكراريَّ وأوجد الوزنَ المنوالى.

خامسًا: أوجد الوسيط.

اختبار الوحدة

١ أكمل بإجابات صحيحة:

أ إذا كان الحدُّ الأدنى لمجموعة ٨ والحدُّ الأعلى لنفس المجموعة ١٤ فإن مركزها = ...

ب إذا كان الحدُّ الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدَّها الأعلى = ...

جـ نقطةُ تقاطع المنحنيين المتجمعين الصّاعد والنازل تعين .... على محور المجموعات.

د إذا كان الوسطُ الحسابيُّ لتوزيع تكراريٍّ هو ٣٩,٤ ومجموعُ تكراراته ١٠٠ فإن مجموعَ حواصلِ ضربِ تَكرارِ كلِّ مجموعةٍ فى مركزها = ...

٢ الجدولُ التالى يبُين التوزيعَ التكراريَّ لأوزان ٢٠ طفلًا بالكيلو جرام

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

أوجد الوزنَ الوسيطَ بالكيلو جرام باستخدام المنحنيين التّكرارين المتجمع الصّاعد والنازل لهذا التوزيع.

٣ فيمايلى التوزيعُ التّكراريُّ للحافز الأسبوعى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الحوافز بالجنيه	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
عدد العمال	١٠	ك	٢٢	٢٦	٢٠	٨

أ احسب قيمة ك.

ب أوجد الوسطَ الحسابيَّ لهذا التَّوزيع.

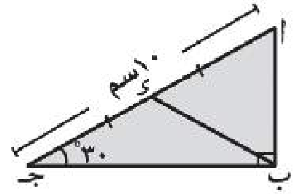
جـ القيمةُ المنوالية للحافز الأسبوعى باستخدام المدرج التَّكرارى.

الوحدة الرابعة

متوسطات المثلث
تمارين (٤ - ١)

أكمل

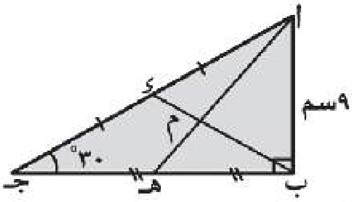
١



ب ى = ... سم ، أ ب = ...سم

محيط △ أ ب ى = ...سم

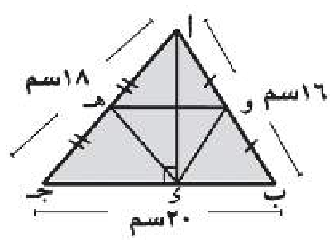
٢



أ جـ = ...سم ، ب ى = ...سم

م ى = ... ب ى ، م ى = ...سم

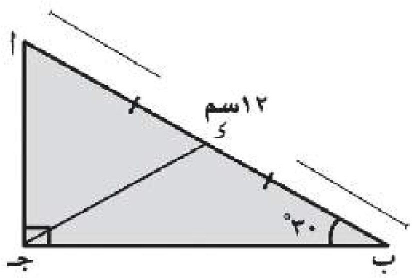
٣



ى و = ...سم ، ى هـ = ...سم ، و هـ = ...سم

محيط △ ى هـ و = ...سم

٤



أ جـ = ...سم ، أ ى = ...سم

ب جـ = ...سم ، جـ ى = ...سم

٥ **فى الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث ، س منتصف $\overline{أب}$ ،

ص منتصف $\overline{بجـ}$ ،

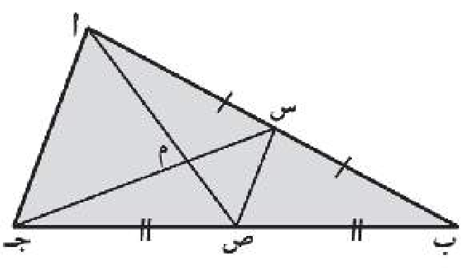
س ص = ٥سم، $\overline{سجـ} \cap \overline{أص} = \{م\}$

حيث: جـ م = ٨سم ، ص م = ٣سم

أوجد:

(١) محيط △ م س ص

(٢) محيط △ م أ جـ

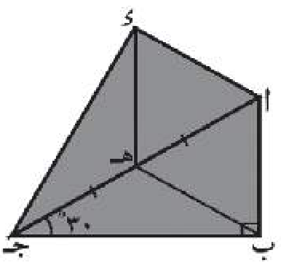


٦ أ ب جـ مثلث ، ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، م ∈ $\overline{\text{أ ى}}$ بحيث **أم** = ٢ م ى ،
رسم $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ.

فإذا كان هـ جـ = ١٢سم

أوجد طول $\overline{\text{هـ م}}$

٧ **فى الشكل المقابل:**



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب،

ق (∠ أ جـ ب) = ٣٠°

أ ب = ٥سم، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

إذا كان ى هـ = ٥سم

فاثبت أن ق (∠ أ ى جـ) = ٩٠°

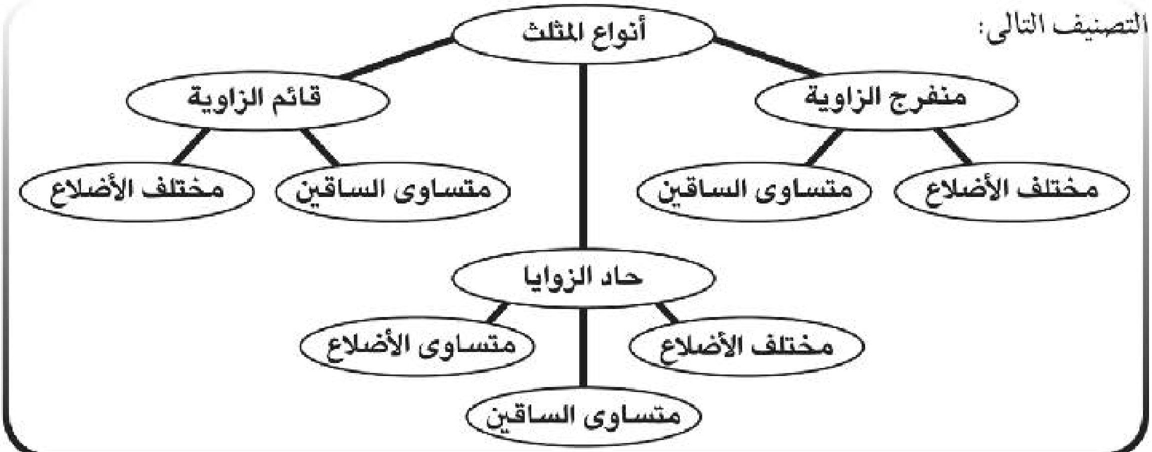
المثلث المتساوى الساقين
تمارين (٤ – ٢)

لاحظ أن:

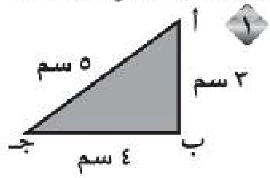
١ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين حادة.

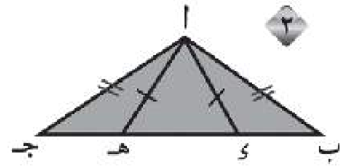
٢ زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين من الممكن أن تكونَ حادةً أو قائمةً أو منفرجةً.

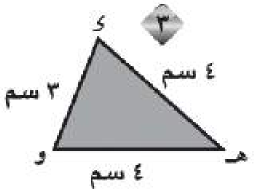
لذلك قد يكون المثلثُ المتساوى الساقين منفرج الزاوية أو قائم الزاوية أو حاد الزوايا كما يوضح التصنيف التالى:

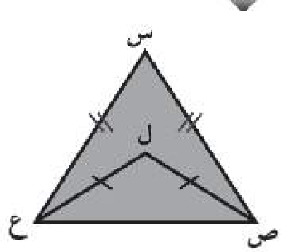


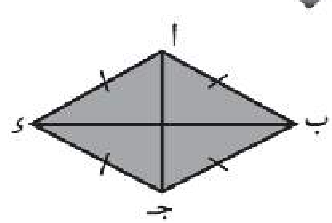
* فى كلٍّ من الأشكالِ التالية اذكر المثلثاتِ المتساوية الساقين وحدِّد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتى القاعدة وزاوية رأس المثلث.

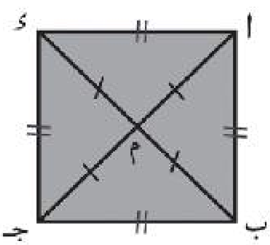
١


٢


٣


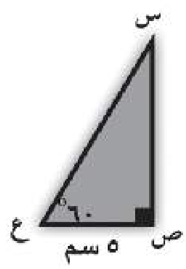
٤


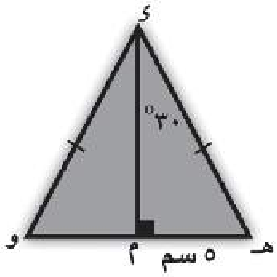
٥


٦


نظريات المثلث المتساوى الساقين
تمارين (٤ - ٣)

١ أكمل





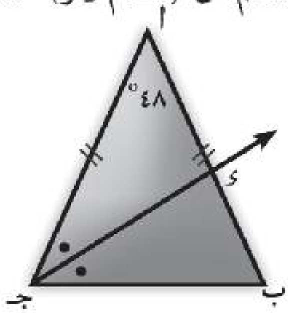
أ جـ = ...

س ع = ... سم

د هـ = ... سم، ق (∠ هـ) = ...°

هـ و = ...سم، ق (∠ م د و) = ...°

٢ فى الشَّكل المقابل:

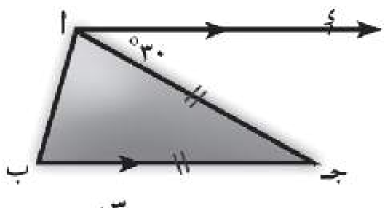


أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٤٨°

$\overrightarrow{\text{جـ د}}$ ينصف ∠ ب جـ أ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى د

أوجد ق (∠ ب)، ق (∠ ب جـ د)

٣ فى الشَّكل المقابل:

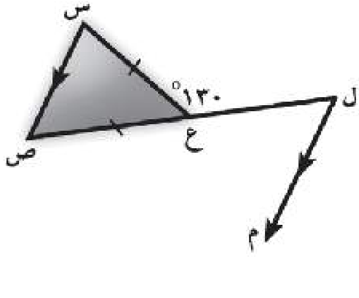


أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ب جـ،

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ د أ جـ) = ٣٠°

أوجد قياسات زاويا △ أ ب جـ

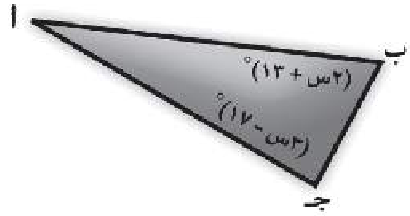
٤ فى الشَّكل المقابل



ع ∈ $\overline{\text{ل ص}}$ ، س ع = ص ع

ق(∠ ل ع س) = ١٣٠° ، $\overleftarrow{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

أوجد ق (∠ م ل ص)

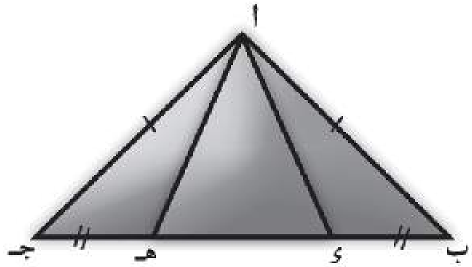


٥ في الشَّكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب) = (٢س + ١٣)°

ق (∠ جـ) = (٣س - ١٧)°

أوجد قياسات زوايا △ أ ب جـ



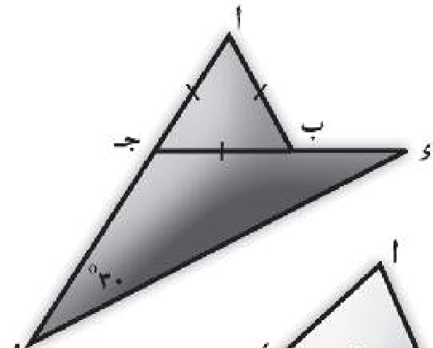
٦ في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ ،

ى ∈ ب جـ ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب ى = هـ جـ

اثبت أن **أولًا:** △ أ ى هـ متساوى الساقين

ثانيًا: ∠ أ ى هـ ≡ ∠ أ هـ ى

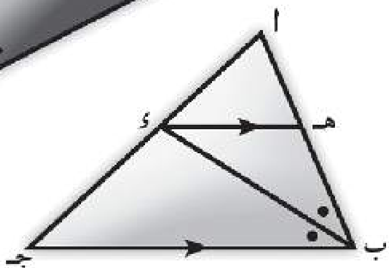


٧ **في الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع.

و ∈ أ جـ ، ى ∈ جـ ب ،

ق (∠ ى و جـ) = ٣٠°

اثبت أن △ ى جـ و متساوى الساقين.



٨ في الشَّكل المقابل

ب ى ينصف ∠ أ ب جـ ، ويقطع أ جـ في ى ،

ى هـ // ب جـ حيث هـ ∈ أ ب .

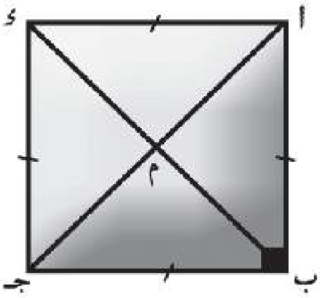
اثبت أن △ هـ ب ى متساوى الساقين.

٩ أ ب جـ مثلث فيه ى ∈ أ ب ، هـ ∈ ب جـ بحيث كان ب ى = ب هـ ، فإذا كان ى هـ // أ جـ

اثبت أن أ ب = ب جـ

١٠ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ب ى ينصف ∠ أ ب جـ ، جـ ى ينصف ∠ أ جـ ب

اثبت أن △ ى ب جـ متساوى الساقين.



١١ أ ب جـ ء مربع تقاطع قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$ في النقطة م

أكمل وناقش

أ في △ أ ب جـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ...°

∵ أ ب = ب جـ

∴ ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب جـ أ) = ...°

ب ∵ ق (∠ ب أ ء) = ٩٠° ∴ ق (∠ ء أ جـ) = ...°

∵ ق (∠ ب جـ ء) = ٩٠° ∴ ق (∠ أ جـ ء) = ...°ص

جـ هل القطر $\overline{أجـ}$ ينصف ∠ أ؟

د هل القطر $\overline{بء}$ ينصف كل من ∠ب، ∠ء ؟

هـ هل △ م أ ء متساوى الساقين؟ لماذا؟

و اذكر مثلثاتٍ متساويةَ الساقين رأس كل منها النقطة م.ص

ز هل م منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$

ح هل $\overline{أجـ} \equiv \overline{بء}$

ط استنتج من البنود السابقة خواصَّ المربع.

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين
تمارين (٤ – ٤)

١ اكمل لتحصل على عبارة صحيحة:

أ مُنَصِّفُ زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون ....

ب عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع تساوى ....

جـ أى نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بعدين متساوين من ....

د إذا كان قياس احدى زوايا مثلث متساوى الساقين ١٠٠°

فإن قياس احدى الزاويتين الأخريين = ...°

٢ اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات بين القوسين :

أ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين = ... (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣)

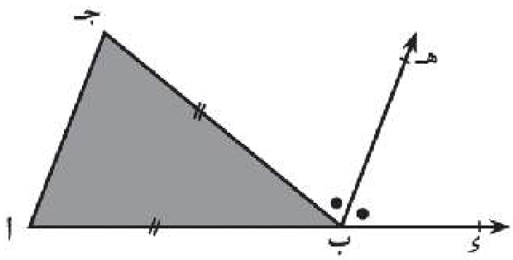
ب المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢سم، (س + ٣) سم، ٥سم يكون متساوى الساقين عندما س = ... سم (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

جـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها من جهة القاعدة بنسبة .... (١ : ٢ ، ٢ : ١ ، ١ : ٣ ، ٢ : ٣)

٣ فى الشكل المقابل:

أ ب = ب جـ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ منصف ∠ جـ ب ى

اثبت أن $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$



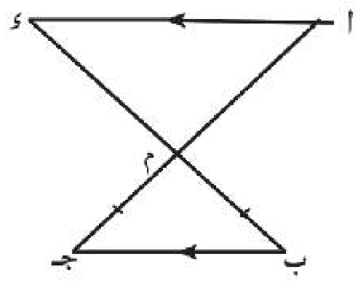
ى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ى}}$ = {م}

$\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، م ب = م جـ

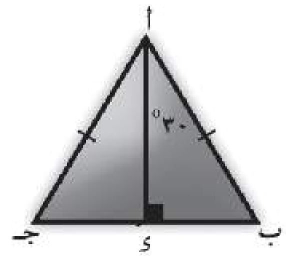
اثبت أن (١) △ أ م ى متساوى الساقين

(٢) محور تماثل △ أ م ى هو نفسه محور تماثل △ ب م جـ



تمارين عامة على متوسطات المثلث والمثلث المتساوى الساقين

١ فى الشَّكلِ المقابِل



أ ب = أ جـ، ب جـ = ١٠سم،

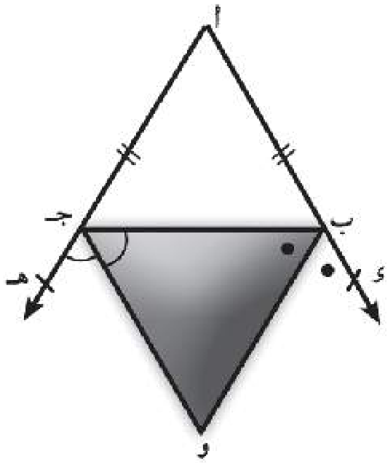
ق (∠ ب أ ء) = ٣٠°، أ ء ⊥ ب جـ

أولاً: أوجد طول كل من ب ء ، أ ء .

ثانيًا: ما عدد محاور تماثل المثلث أ ب جـ؟

ثالثًا: ما مساحة △ أ ب جـ؟

٢ فى الشَّكل المقابل



أ ب = أ جـ، ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ جـ

ب و ينصف ∠ ء ب جـ،

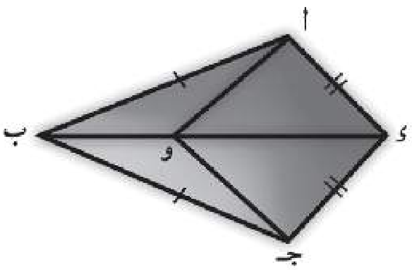
جـ و ينصف ∠ ب جـ هـ

اثبت أن

أولاً: △ ب و جـ متساوى الساقين

ثانيًا: أ و محور تماثل ب جـ

٣ فى الشكل المقابل



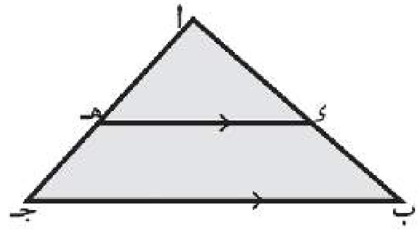
أ ب = جـ ب ، أ ء = جـ ء

اثبت أن

ب ء ينصف ∠ أ ء جـ

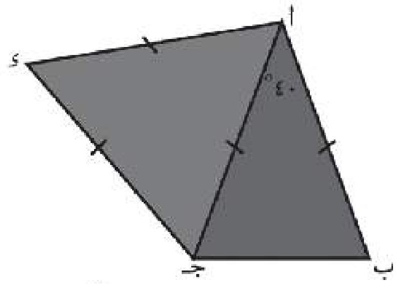
و ء ينصف ∠ أ ب جـ

٤ فى الشكل المقابل



ء هـ // ب جـ، أ ء = أ هـ

برهن أن: أ ب = أ جـ .

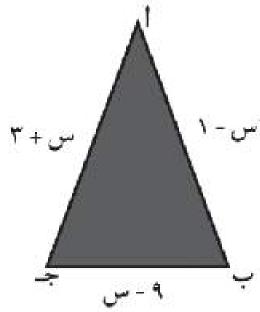


٥ في الشكل المقابل:

أ ب = أ جـ = أ ى = جـ ى

ق (∠ ب أ جـ) = ٤٠°

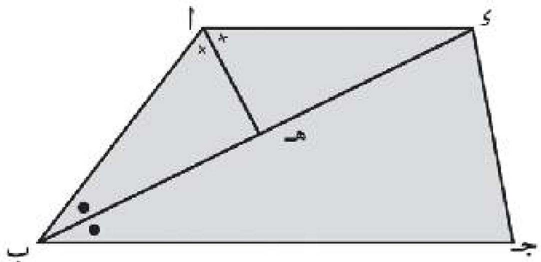
أوجد: ق (∠ ب جـ ى)



٦ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

أوجد محيط المثلث



٧ في الشكل المقابل:

أ ب جـ ى شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$،

$\overrightarrow{\text{ب ى}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ى

اثبت أن: أولاً: أ ب = أ ى **ثانيًا:** $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ى}}$

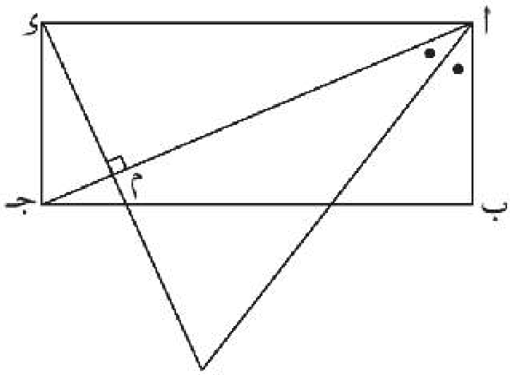
ثالثًا: ب هـ = هـ ى

نشاط

١ باستخدام المسطرة والفرجار ارسم ∠ أ ب جـ الحادة

وفي الجهة الأخرى من $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ارسم $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

٢ **في الشّكل المقابل** أ ب جـ ى مستطيل،



$\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فيه، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ،

$\overline{\text{ى هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

حيث $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overrightarrow{\text{ى هـ}}$ = {هـ}

$\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ى هـ}}$ = {م}

برهن أن ى أ = ى هـ.

الهندسة
اختبار الوحدة

١ أكمل لتجعلَ العباراتِ صحيحةً:

أ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

ب المتوسطُ المرسومُ من رأسِ المثلث المتساوى الساقين يكون..............، ....

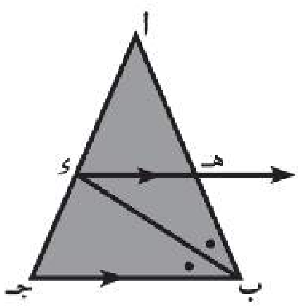
جـ △ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ) = ٧٠° فإن ق (∠ جـ) = ...

د عدد محاور المثلث المتساوى الأضلاع = ...

هـ قياسُ الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

و المستقيمُ العمودىُّ على القطعةِ المستقيمة من منتصفها يسمى ....

٢ فى الشكلِ المقابل:

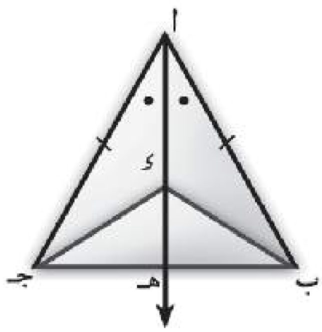


أ ب جـ مثلث فيه $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ء، ورسم $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

$\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {هـ}

برهن أن ب هـ = هـ د

٣ فى الشكلِ المقابِل أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ،



$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ∩ ب جـ = {هـ}

ء ∈ $\overline{\text{أ هـ}}$.

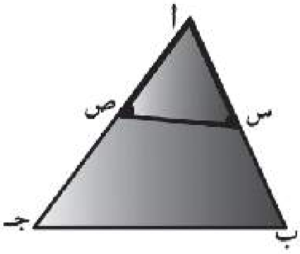
برهن أن

أ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

ب ب ء = جـ ء

الوحدة الخامسة

التباين
تمارين (٥ – ١)

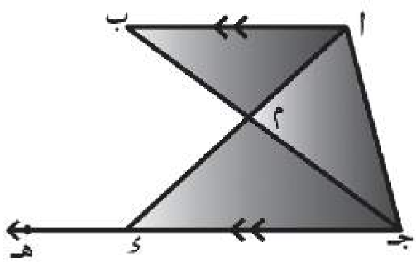


١ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه أ جـ > أ ب، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

اثبت أن: ص جـ > س ب



٢ في الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ،

$\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ب}}$ = {م}، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{جـ ء}}$

اثبت أن: أ ق (∠ أ جـ ء) > ق (∠ أ ب جـ)

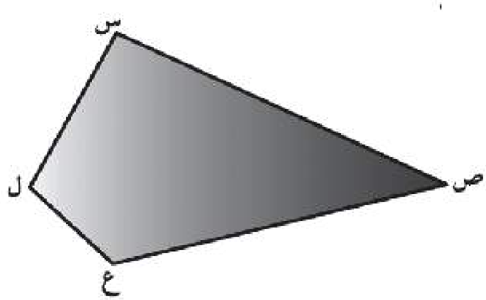
ب ق (∠ أ ء هـ) > ق (∠ أ ب جـ)

٣ م نقطة داخل المثلث أ ب جـ.

اثبت أن: ق (∠ أ م ب) > ق (∠ أ جـ ب)

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث
تمارين (٥ – ٢)

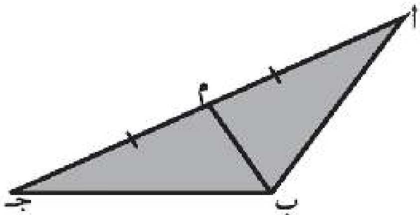
١ △ أ ب جـ فيه أ ب = ٢,٧سم، ب جـ = ٨,٥ سم، أ جـ = ٦سم رتب قياسات زوايا المثلث تصاعديًا.



٢ **فى الشَّكل المقابل:**

س ص > س ل ، ص ع > ع ل

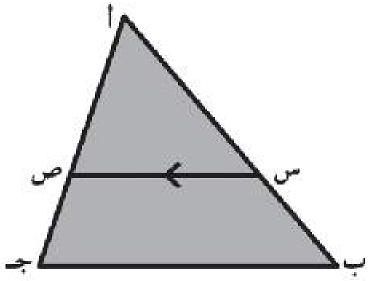
برهن أن: ق (∠ س ل ع) > ق (∠ س ص ع)



٣ **فى الشكل المقابل:**

ب م متوسط فى △ أ ب جـ، ب م < أ م

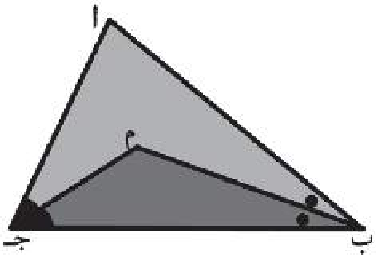
برهن أن: ∠ أ ب جـ منفرجة.



٤ **فى الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث فيه أ ب > أ جـ، س ص // ب جـ

برهن أن: ق (∠ أ ص س) > ق (∠ أ س ص)



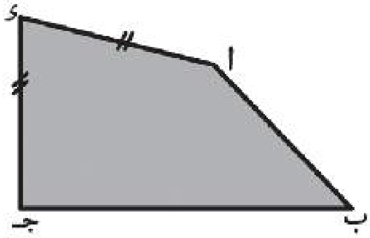
٥ **فى الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث، ب م ينصف ∠ أ ب جـ ،

جـ م ينصف ∠ أ جـ ب.

فإذا كان: أ ب > أ جـ ، **برهن أن:**

ق (∠ م جـ ب) > ق (∠ م ب جـ)

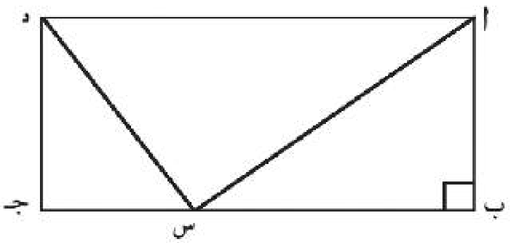


٦ **في الشكل المقابل:**

أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أ ى = ى جـ ، ب جـ > أ ب

برهن أن:

ق (∠ أ) > ق (∠ جـ)

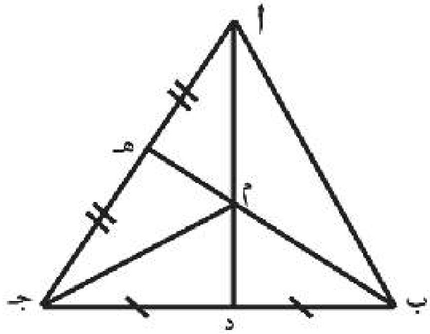


٧ **في الشكل المقابل:**

أ ب جـ د مستطيل ، س ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث

أ س > س د **اثبت أن:**

ق (∠ س أ ب) > ق (∠ س د جـ)



٨ **في الشكل المقابل:**

△ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان فيه

تقاطعا في م ،إذا كان م د > م هـ **فبرهن أن:**

ق (∠ م $\hat{\text{أ}}$ ب) > ق (∠ م ب أ)

٩ أ ب جـ ى شكلٌ رباعيٌّ فيه $\overline{\text{أ ب}}$ أكبر الأضلاع طولاً ، $\overline{\text{جـ ى}}$ أصغرُ الأضلاع طولاً برهن أن:

ق (∠ ب جـ ى) > ق (∠ ب أ ى)

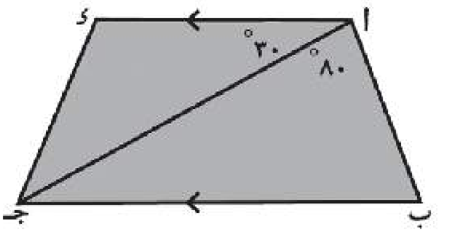
المقارنه بين أطوال الأضلاع فى المثلث
تمارين (٥ - ٣)

١ △ أ ب جـ فيه ق (∠أ) = ٤٠°، ق (∠ ب) = ٧٥°، رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

٢ **فى الشّكل المقابل:**

$\overleftarrow{أ ى}$ // $\overline{ب جـ}$، ق (∠ب أ جـ) = ٨٠°

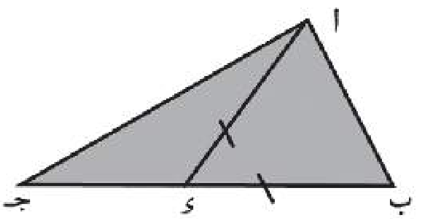
ق (∠ى أ جـ) = ٣٠° **برهن أن:** ب جـ > أ ب



٣ **فى الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث ى ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب ى = أ ى

برهن أن: ب جـ > أ جـ

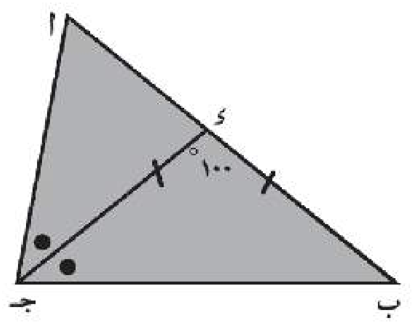


٤ **فى الشكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث ، $\overleftarrow{جـ ى}$ ينصف ∠ جـ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ى

ق (∠ب ى جـ) = ١٠٠°، ى ب = ى جـ

برهن أن: أ جـ > ى ب .

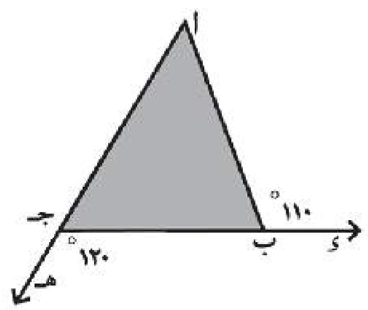


٥ **فى الشكل المقابل:**

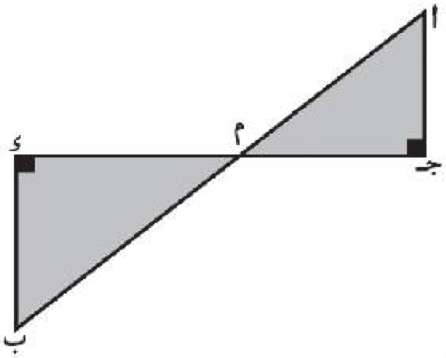
أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overleftarrow{جـ ب}$، هـ ∈ $\overleftarrow{أ جـ}$

ق (∠أ ب ى) = ١١٠°، ق (∠ ب جـ هـ) = ١٢٠°

برهن أن: أ ب > ب جـ .



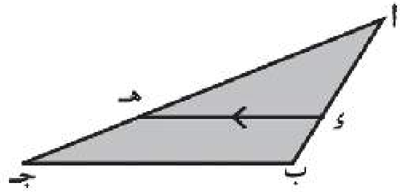
٦ في الشكل المقابل:



أب ∩ جـء = {م}، أجـ ⊥ جـء ، بء ⊥ جـء

برهن أن: أب > جـء

٧ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية في ب

ء هـ // ب جـ

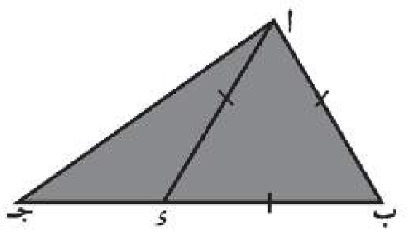
برهن أن: أهـ > أء

٨ أ ب جـ مثلث، جـء ينصف ∠ جـ، جـء ∩ أب = {ء}

، **برهن أن** : ب جـ > ب ء

٩ △ أ ب جـ فيه ق (∠ أ) = (٥س + ٢)°، ق (∠ ب) = (٦س - ١٠)°، ق (∠ جـ) = (س + ٢٠)°، رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.

١٠ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث، ء ∈ ب جـ، أب = أء = ب ء

برهن أن: ب جـ > أ جـ

١١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ء ∈ أجـ ، هـ ∈ ب جـ بحيث أء = ب هـ اثبت أن:

ق (∠ جـ هـ ء) > ق (∠ جـ ء هـ)

متباينة المثلث
تمارين (٥ - ٤)

١ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٥سم، ١٢سم فما هو طول الضلع الثالث؟ اذكر السبب.

٢ **بيِّن أى مجموعاتِ الأطوال الآتية تصلحُ لأن تستخدمَ فى رسم مثلث:**

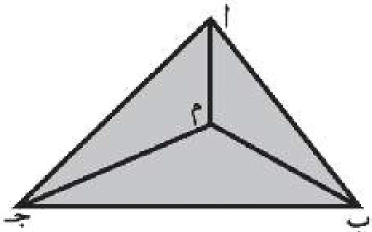
أ ٥سم، ٧سم، ٨سم
ب ٤سم، ٩سم، ٣سم
جـ ١٠سم، ٦سم، ٤سم
د ١٥سم، ١٧سم، ٣٠سم.

٣ برهن أن طولَ أى ضلعٍ فى المثلث أصغر من نصف محيط المثلث.

٤ **فى الشَّكل المقابل:**

أ ب جـ مثلث ، م نقطة داخله برهن أن:

م أ + م ب + م جـ > $\frac{1}{2}$ محيط المثلث أ ب جـ



٥ برهن أن مجموعَ طولى قطرى أى شكلٍ رباعى محدَّب أصغر من محيط الشكل.

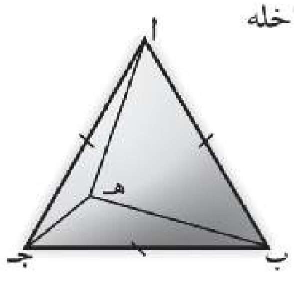
تمارين عامة على التباين

١ **فى الشَّكل المقابل:** أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، هـ نقطة داخله

ق (∠ هـ جـ ب) > ق (∠ هـ ب جـ).

أولاً: برهن أن: ق (∠ ا ب هـ) > ق (∠ ا جـ هـ).

ثانيًا: ق (∠ أ) > ق (∠ ا ب هـ) > ق (∠ ا جـ هـ).

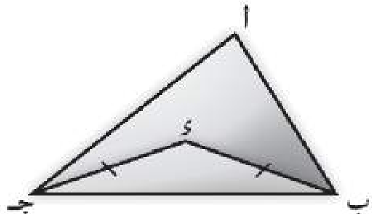


٢ **فى الشَّكل المقابل:**

ى ب = ى جـ .

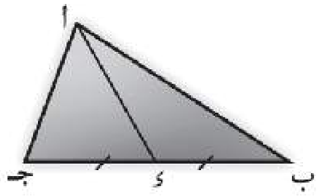
ق (∠ ا ب جـ) > ق (∠ ا جـ ب)

برهن أن: ق (∠ ا ب ى) > ق (∠ ا جـ ى)



٣ ا ب جـ مثلث فيه اب = ٦سم، ا جـ = ٧سم، ب جـ = ٨سم

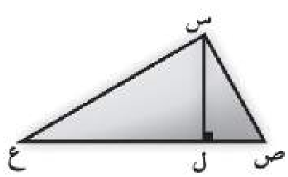
رتب قياس زواياه ترتيبًا تصاعديًا



٤ **فى الشَّكل المقابل:**

ا ب > ا جـ ، ى ب = ى جـ

برهن أن ق (∠ ب ا ى) < ق (∠ جـ ا ى) .



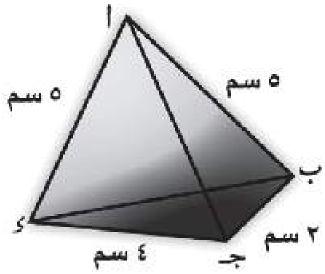
٥ **فى الشَّكل المقابل:**

$\overline{\text{س ع}}$ > $\overline{\text{س ص}}$

$\overline{\text{س ل}}$ ⊥ $\overline{\text{ع ص}}$

برهن أن ق (∠ ل س ع) > ق (∠ ل س ص)

٦ في الشَّكل المقابل:

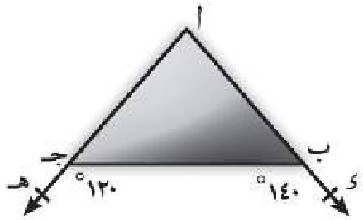


أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أ ب = أ ى = ٥سم،

ب جـ = ٢سم، ى جـ = ٤ سم.

برهن أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ ى جـ)

٧ في الشَّكل المقابل:

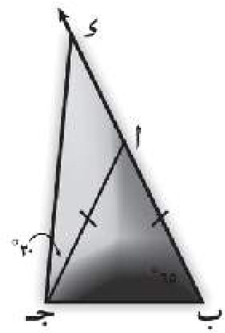


ق (∠ ى ب جـ) = ١٤٠°

ق (∠ هـ جـ ب) = ١٢٠°

برهن أن جـ ب > أ ب

٨ في الشكل المقابل:



أ ب = أ جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ٦٥°

ق (∠ أ جـ ى) = ٢٠°

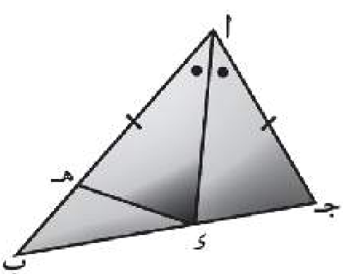
برهن أن أ ب > أ ى

٩ في الشكل المقابل:

ق (∠ ب) = ٩٠°

برهن أن أ جـ > ى جـ

١٠ في الشكل المقابل:



أ جـ > ى جـ ، ق (∠ جـ أ ى) = ق (∠ ب أ ى)

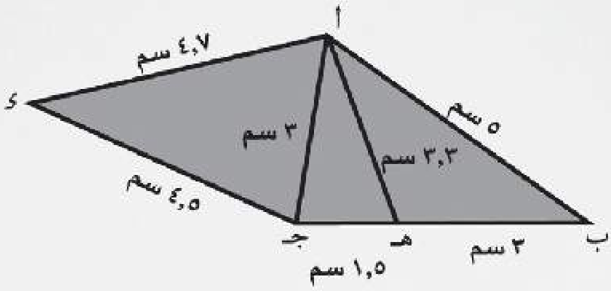
أ هـ = أ جـ

برهن أن: أ ى هـ = ى جـ

ب ق (∠ ب هـ ى) > ق (∠ أ ى جـ)

جـ ب ى > ى جـ .

نشاط



١ من الشَّكل المقابلِ أكمل باستخدام (< أو >)

أ ق (∠ ء أ جـ) .... ق (∠ أ جـ ء)

ب ق (∠ أ هـ جـ) .... ق (∠ هـ جـ أ)

جـ ق (∠ أ ب هـ) .... ق (∠ هـ أ ب)

د ق (∠ جـ ء أ) .... ق (∠ ء أ جـ)

هـ ق (∠ أ هـ ب) .... ق (∠ هـ أ جـ)

٢ في المثلثِ أ ب جـ ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم
فإن أ جـ ∋] .... ، ....[

٢ فى المثلثِ أ ب جـ: ق (∠ أ) = (٩س)°، ق (∠ ب) =(٦س - ١٧)°
ق (∠ جـ) = (٧ س - ١)°
رتِّب أطوالَ أضلاع المثلث تصاعديًا

اختبار الوحدة

١ أكمل لتكون العبارةُ صحيحةً:

أ أصغرُ زوايا المثلث فى القياس يقابلها ....

ب فى △ أ ب جـ: إذا كان ق (∠ أ) = ٧٠°، ق (ب) = ٣٠° فإن أكبرَ أضلاع المثلث طولاً هو ....

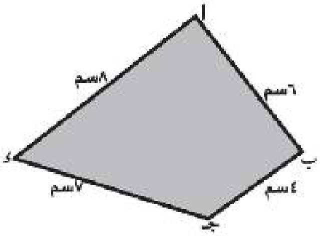
جـ إذا كان طولا ضلعينِ فى مثلثٍ متساوى الساقين ٣سم ، ٧سم فإن طولَ الضِّلعِ الثالث = ...

د △ أ ب جـ فيه: ق (∠ أ) = ١٠٠° فإن أكبر أضلاعه طولاً هو ....

هـ △ أ ب جـ فيه أ ب = ٣سم، ب جـ = ٥سم، فإن أ جـ ∈] ....، .... [

و أطولُ أضلاعِ المثلث القائم الزاوية هو ....

٢ فى الشَّكلِ المقابل:

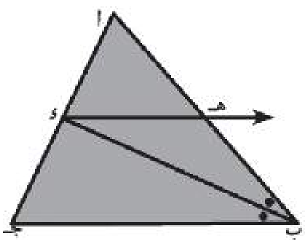


أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٤سم، جـ ى = ٧سم، ى أ = ٨سم

برهن أن:

ق (∠ ب جـ ى) > ق (∠ ب أ ى)

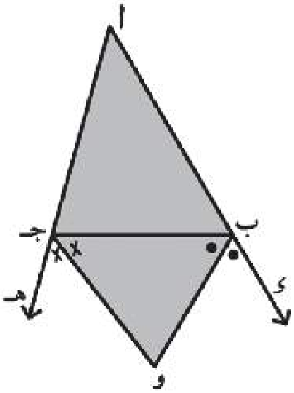
٣ فى الشَّكلِ المقابل:



أ ب جـ مثلث، $\overrightarrow{\text{ب ى}}$ ينصف ∠ ب، $\overline{\text{ب ى}}$ ∩ $\overline{\text{أ جـ}}$ = {ى}، $\overrightarrow{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ

برهن أن: أ ب > أ ى

٤ فى الشكل المقابل:



△ أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ، ى ∈ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

$\overrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ ى ب جـ ، $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ ينصف ∠ ب جـ هـ

$\overrightarrow{\text{ب و}}$ ∩ $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ = {و}

برهن أن:

أ ق (∠ و ب جـ) > ق (∠ ب جـ و)

ب جـ و > ب و

نماذج امتحانات الجبر والإحصاء

النموذج الأول

[١] أكمل ما يأتي :

(١) مجموعة حل المعادلة (س^٢ + ٣) (س^٣ + ١) = ٠ هى .... (س ∈ ح)

(٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥ فإن

فإن س = ...

(٣)]− ٢ ، ٢[∪ {− ٢ ، ٠} = ...

(٤) المكعب الذى حجمه ٨ سم^٣ يكون مجموع اطوال احرفه = ... سم

(٥) المعكوس الضربى للعدد √٣ + √٢ = ... فى أبسط صورة

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان نصف قطر كرة = ٦سم فإن حجمها يساوى :

(أ) ٦ π سم^٣ (ب) ٣٦ π سم^٣ (جـ) ٧٢ π سم^٣ (د) ٢٨٨ π سم^٣

(٢) إذا كانت النقطة (أ ، ١) تحقق العلاقة س+ص =٥ فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٥

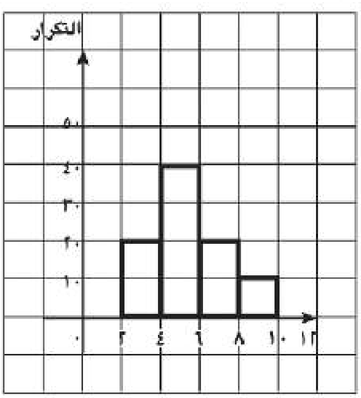
(٣) (٢ ∛٢)^٣ = ... (أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٤٠

(٤) الوسيط لمجموعة من القيم ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ هو :

(أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٤ (د) ٢

(٥) إذا كان الوسط الحسابى للقيم ٢٧ ، ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٦ ، ك هو ١٤ فإن ك تساوى :

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٨٤



(٦) فى الشكل المقابل :قيمة المنوال = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤٠

[٣] (أ) اوجد قيمة : √١٨ + √٥٤ − ٣√٢ − $\frac{١}{٢}$ √٢٤

(ب) إذا كان س = $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ ، ص = √٥ − √٢

اثبت ان س ، ص عددان مترافقان

[٤] (أ) ارسم بيانيا العلاقة الخطية ص = ٢ − س

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{٣س + ١}{٦}$ < س + ١ < $\frac{س + ٤}{٢}$ فى ح ومثلها على خط الأعداد .

[٥] (أ) اسطوانه دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعها ٩ سم . اوجد حجمها بدلالة π . واذا كان حجمها يساوى حجم كرة فاوجد طول نصف قطر الكرة

(ب) اوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعة	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

النموذج الثانى

[١] أكمل ما يأتي:

(١) المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{٣} - \sqrt{٥}$ هو . . . . .

(٢) $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})(\sqrt{٨} - \sqrt{٢}) =$ ....

(٣) مرافق العدد $\dfrac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ هو ......

(٤) إذا كان حجم كرة $= \dfrac{٩}{٢}\pi$ سم^٣ فإن طول قطرها = ... سم

(٥) $[٣ ، ٤] - \{٣ ، ٥\} =$ . . . .

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان حجم مكعب = ٢٧ سم^٣ فإن مساحة احد أوجهه يساوى :

(أ) ٣ سم^٢ (ب) ٩ سم^٢ (ج) ٣٦ سم^٢ (د) ٥٤ سم^٢

(٢) إذا كان المنوال لمجموعة من القيم ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢س هو ٤ فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

(٣) إذا كان الوسط الحسابى للقيم ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ك−١ ، ك هو ١٨ فإن ك =

(أ) ١ (ب) ٧ (ج) ٢٩ (د) ٩٠

(٤) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها هو :

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

(٥) اسطوانه دائرية قائمة طول نصف قطرها يساوى نق ارتفاعها يساوى طول قطرها ، يكون حجمها = ... سم^٣

(أ) π نق^٣ (ب) π نق^٢ (ج) ٢ π نق^٣ (د) ٢ نق^٣

(٦) مجموعة حل المعادلة س (س^٢ − ١) = صفر ، س $\in$ ح هى . . . .

(أ) [صفر] (ب) [١] (ج) [−١] (د) [٠ ، −١ ، ١]

[٣] (أ) اختصر لأبسط صورة : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(ب) اثبت ان : $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54}$ = صفر

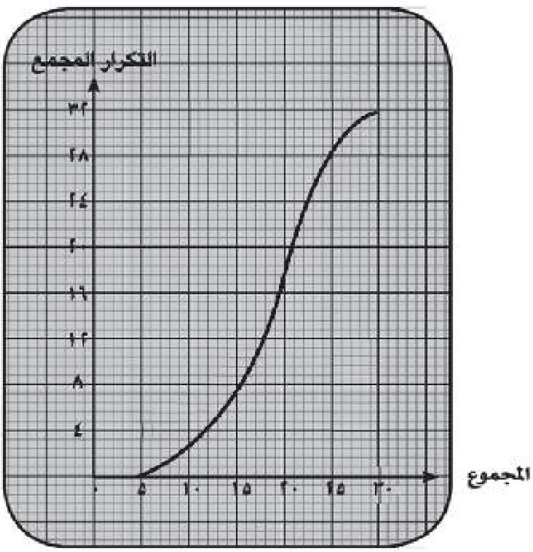
[٤] (أ) اوجد مجموعة حل المتباينة : $-2 < 3س + 7 \leq 10$ فى ح مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد .

(ب) إذا كانت $س = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ فأوجد قيمة : $س^4 - 2س^2 + 1$

[٥] (أ) الشكل المقابل يمثل درجات ٣٢ طالبا فى أحد الاختبارات

أكمل:

الدرجة الوسيطية = ...



(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكرار .

المجموعة	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

نموذج الفصل الأول للطلاب المدمجين

السؤال الأول:

أكمل العبارات التالية لتصبح صحيحة

(١) مرافق العدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ هو ....

(٢) $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} =$ ....

(٣) المنوال لمجموعة القيم ٣، ٥، ٣، ٤، ٣، هو ....

(٤) الوسيط لمجموعة من القيم ٢، ٣، ٥، ٧، ٩ هو ....

(٥) مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٩ =$ صفر فى ح هي ....

السؤال الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة

(١) الوسط الحسابى لمجموعة القيم ٩، ٦، ٥، ١٤، ١ يساوي ....

أ) ٧ ب) ٣ جـ) ٥ د) ٩

(٢) أبسط صورة للمقدار $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ هو..........

أ) $\sqrt{٣}$ ب) ١ جـ) $\sqrt{٢}$ د) $٢\sqrt{٣}$

(٣) المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{٥}$ هو ....

أ) $\sqrt{٥}$ ب) ٥ جـ) $\sqrt{٢}$ د) -٥

(٤) $[٣ ، ٥] - \{٣ ، ٥\} =$ ....

أ) $]٣ ، ٥[$ ب) $[٣ ، ٥[$ جـ) $\varnothing$ د) $]٣ ، ٥]$

(٥) مكعب حجمه ٦٤سم^{٣} فإن طول حرفه ....سم

أ) ٤ ب) ٨ جـ) ١٦ د) ٦٤

السؤال الثالث:

اكتب أمام العبارة فى العمود الثانى رقم الجملة المناسبة لها من العمود الأول

(١) مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٢٥ = ٠$ فى ح هو.... ( ) $[٠ ، ٢]$

(٢) $[-٣ ، ٢] \cap [٠ ، ٢] =$ .... ( ) ٧

(٣) إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم هو.......... ( ) $\{٥ ، -٥\}$

(٤) $\sqrt{٣}$ هو عدد.......... ( ) 

(٥) مجموعة حل المتباينة $٣ \leqslant س \leqslant ٧$ هى .... ( ) غير نسبي
(على خط الأعداد)

السؤال الرابع:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة

(١) الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = مجموع القيم ÷ عددها ( )

(٢) إذا كان س = $\sqrt{١٣} - \sqrt{٧}$ ، ص = $\sqrt{١٣} + \sqrt{٧}$ فإن س ، ص مترافقان ( )

(٣) العدد غير النسبى $\sqrt{٧}$ يقع بين ٢ ، ٣ ( )

(٤) $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} = ٧\sqrt{٣}$ ( )

(٥) أبسط صورة للمقدار $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ هو $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$ ( )

السؤال الخامس:

أولاً:

إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها = $\frac{.......... + ...}{٢}$ = ...

ثانياً الجدول الأتى لإيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الأتى

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

المجموعات	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	م × ك
٥-	١٠	٧	١٠×٧=٧٠
١٥-	٢٠	١٠	٢٠×١٠=.....
٢٥-	......	......	.....×١٢=........
٣٥-	......	......	.....×١٣=........
٤٥-	......	......	..... × ٨=........
المجموع		٥٠	.....

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجـ (ك × م)}}{\text{مجـ (ك)}}$ = $\frac{...............}{...............}$ = ...

نماذج امتحانات الهندســة

النموذج الأول

[١] أكمل ما يأتى :

(١) أكبر اضلاع المثلث القائم الزاوية طولا هو ....

(٢) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٢سم ، ٧سم فإن : ...... > طول الضلع الثالث > .....

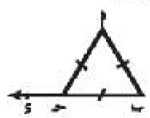
(٣) إذا اختلفا قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس ....

(٤) إذا كان متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن ....

(٥) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوي الساقين = ٦٠° كان المثلث ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) △ أ ب جـ متساوي الأضلاع ق(∠أ جـ د) =



(أ) ٤٥° (ب) ٦٠°
(جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

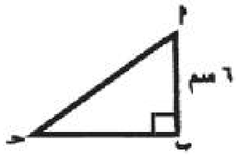
(٢) فى المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان أ جـ = ٢٠ سم
فإن طول المتوسط المرسوم من ب =
(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٦ سم (د) ٥ سم

(٣) س ص ع مثلث فيه ق(∠ع) = ٧٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° فإن ص ع ..... س ص
(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

(٤) الأطوال التي تصلح أن تكون أضلاع مثلث هى :
(أ) ٠ ، ٢ ، ٥ (ب) ٣ ، ٣ ، ٥ (جـ) ٣ ، ٣ ، ٦ (د) ٣ ، ٣ ، ٧

(٥) المثلث الذي فيه قياسا زاويتين ٤٢° ، ٦٩° يكون :
(أ) متساوي الساقين (ب) متساوي الأضلاع (جـ) مختلف الأضلاع (د) قائم الزاوية

(٦) فى الشكل المقابل : اذا كان

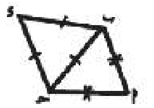


ق(∠أ) = ٢ ق(∠جـ)
فان أ جـ = ... سم
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

[٣] (أ) أكمل: Δ أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ فإن:

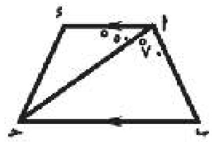
ق(∠ جـ) .... ق(∠ ب)

(ب) فى الشكل المقابل:



ق(∠أ) = ٥٠° ، أ ب = أ جـ ، Δ ء ب جـ متساوي الأضلاع أوجد ق (∠أ ب ء).

(جـ) فى الشكل المقابل:

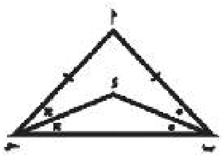


أ ء // ب جـ ، ق(∠ ب أ جـ) = ٧٠°

ق(∠ء أ جـ) = ٥٠° ، اثبت ان ب جـ > أ جـ

[٤] (أ) برهن ان: زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

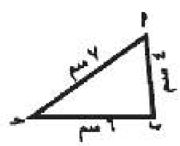
(ب) فى الشكل المقابل:



أ ب = أ جـ ، ب ء ينصف (∠ ب) ، جـ ء ينصف (∠ جـ)

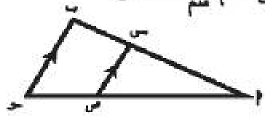
اثبت ان : Δ ء ب جـ متساوي الساقين

[٥] (أ) فى الشكل المقابل:



رتب زوايا Δ أ ب جـ ترتيباً تنازليا .

(ب) فى الشكل المقابل:



أ ب > ب جـ ، س ص // ب جـ

اثبت ان : أ س > س ص

النموذج الثانى

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المثلث الذى له ثلاثة محاور تماثل هو مثلث :

(أ) مختلف الأضلاع (ب) متساوي الساقين (جـ) قائم الزاوية (ء) متساوي الأضلاع

(٢) مجموع طولي اي ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوي (ء) ضعف

(٣) مثلث متساوي الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤سم فإن طول الضلع الثالث .... سم

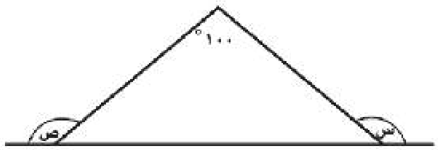
(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣ (ء) ١٢

(٤) إذا كان Δ أ ب حـ فيه ق(∠ب) = ١٣٠° فإن أكبر أضلاعه طولا هو :..................

(أ) ب حـ ‾‾ (ب) أ حـ ‾‾ (حـ) أ ب ‾‾ (د) متوسطه

(٥) Δ س ص ع متساوى الساقين فيه ق(∠س) = ١٠٠° ، فإن ق(∠ص) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (حـ) ٦٠° (د) ٤٠°



(٦) فى الشكل المقابل س+ص =.............

(أ) ١٠٠° (ب) ١٤٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٨٠°

[٢] أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية تساوي ٤٥° كان المثلث ....

(٢) طول اي ضلع فى مثلث ..... مجموع طولي الضلعين الآخرين.

(٣) إذا كان أ ب ‾‾ ≡ س ص ‾‾ فإن أ ب = ...

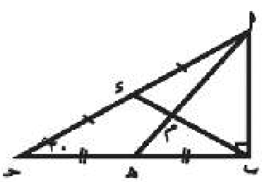
(٤) فى Δ أ ب حـ إذا كان ق(أ̂) = ٣٠° ، ق(ب̂) = ٩٠° فإن ب حـ = ... أ حـ

(٥) محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم ...... من منتصفها.

[٣]

(أ) فى المثلث أ ب حـ فيه أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم .

رتب تصاعديا قياسات زواياه .



(ب) فى الشكل المقابل :

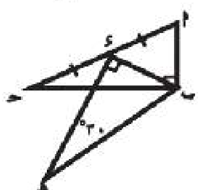
Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(حـ̂) = ٣٠° ،

د منتصف أ حـ ‾‾ ، هـ منتصف ب حـ ‾‾ ،

أ حـ = ٩ سم .

أوجد طول كلٍ من : ب د ‾‾ ، ب م ‾‾ ، أ ب ‾‾

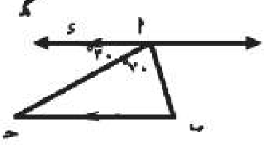
[٤]



(أ) فى الشكل المقابل :

ق(أ ب̂ حـ) = ق(ب د̂ هـ) = ٩٠° ، ق(هـ̂) = ٣٠°

د منتصف أ حـ ‾‾ ، اثبت ان: أ حـ = ب هـ



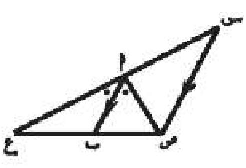
(ب) فى الشكل المقابل :

أ د ‾‾ // ب حـ ‾‾ ، ق(ب أ̂ حـ) = ٧٠° ،

ق(د أ̂ حـ) = ٣٠° . اثبت ان: أ حـ > ب حـ

[٥]

(أ) إذا اختلفا قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها .....



(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب ‾‾ // س ص ‾‾ ، أ ب ⟵ ينصف (∠ص أ ع) ،

برهن ان : س ع > ص ع

نموذج الفصل الأول للطلاب المدمجين

السؤال الأول:

أكمل العبارات التالية:

(١) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة

(٢) فى المثلث القائم الزاوية طول المتوسط الخارج من رأس القائمة =................

(٣) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين.................

(٤) △ أب جـ فيه ق (∡ ب) = ٧٠° ، ق(∡ جـ) = ٥٠° فإن أ جـ .... أ ب

(٥) متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يكون .... على القاعدة

السؤال الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(١) إذا كان △ أب جـ متساوى الأضلاع فإن ق(∡ ب) = ...

(٣٠°، ٦٠°، ٧٠°، ٩٠°)

(٢) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم = ... الوتر

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ٢)

(٣) إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٨٠ ° فأن قياس احدى زاويتى قاعدته =.........

(٦٠°، ٤٠°، ٣٠°، ٥٠°)

(٤) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ......

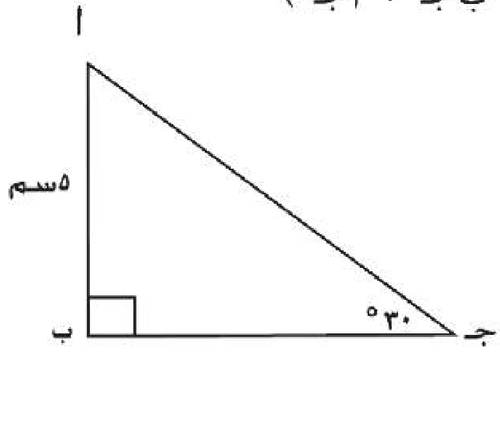
(١، ٢، ٣، صفر)

(٥) △ أ ب جـ فيه ق(∡ أ) = ٥٠° ، ق(∡ ب) = ٦٠ ° فإن أكبر الأضلاع طولاً...........

($\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$)

السؤال الثالث:

فى الشكل المقابل أكمل ما يلي:



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، ق(∡جـ) = ٣٠°

أ ب =٥سم أوجد طول $\overline{أ جـ}$

∵ ق(∡ ب)=....... ° ، ق(∡ جـ)= .... °

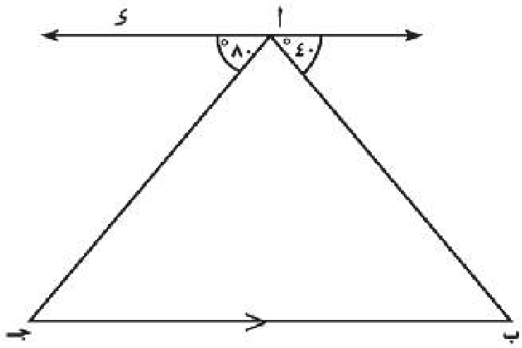
∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ......

∴ أ جـ = ... سم

السؤال الرابع:

أ - △ ا ب جـ فيه ق(∠ا) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٧٥° ق(∠جـ) = ٦٥°

رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً



ب - فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{اء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أكمل :

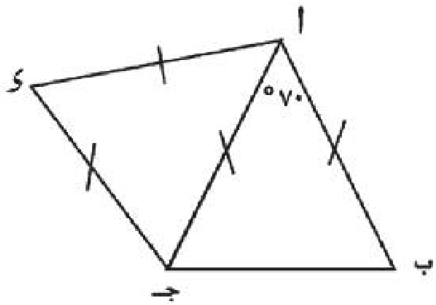
١) ق (∠ ب) = ... °

٢) الضلع ....هو أطول أضلاع △ أب جـ

السؤال الخامس : من الشكل المقابل

ضع علامه(✓) إمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗)أمام العبارة الخاطئة

أب = أجـ = جـ ء = أء= ١٠سم . ق (∠ ب أجـ) =٧٠°



(١) ق (∠ ب) = ٥٥° ( )

(٢) ق (∠ ء) = ٧٠° ( )

(٣) ق (∠ ء جـ ب) = ١٢٠° ( )

(٤) أب + أء = ٢٠ سم ( )

(٥) أب + ب جـ = ب جـ + جـ ء ( )

انتهت الأسئلة

المواصفات الفنية:

مقاس الكتاب	طبع المتن	طبع الغلاف	ورق المتن	ورق الغلاف	عدد الصفحات بالغلاف	رقم الكتاب
$\frac{1}{8}$ (٥٧ X ٨٢) سم	٤ ألوان	٤ ألوان	٧٠ جرام أبيض	١٨٠ جرام كوشيه	١٧٦ صفحة	١٠/٢/٧١/٤/٢٢٧

http://elearning.moe.gov.eg